Grandes déviations pour les temps locaux d'auto-intersections de marches aléatoires

Clément Laurent

Université de Provence

Thèse

présentée pour obtenir le grade de

Docteur Aix-Marseille Université
délivré par l'Université de Provence

Spécialité : Mathématiques

par

Clément Laurent

sous la direction de Fabienne Castell

Titre :

Grandes déviations pour les temps locaux d'auto-intersections de marches aléatoires

---

soutenue publiquement le 18 novembre 2011

JURY

Fabienne Castell	Université de Provence	Directrice
Xia Chen	University of Tenessee	Rapporteur
Frank den Hollander	Universiteit Leiden	Examinateur
Wolfgang König	Weierstraß Institut Berlin	Rapporteur
Pierre Mathieu	Université de Provence	Examinateur
Zhan Shi	Université Pierre et Marie Curie	Examinateur

Remerciements

Ecrire cette page de remerciements est en quelques sorte un soulagement pour moi puisque cela signifie que la rédaction de la thèse est finie. Certes la soutenance est à venir et le stress n'a donc pas encore disparu, mais enfin on peut dire que le principal du travail est fait. Alors bien entendu, mes premières pensées vont à ma directrice Fabienne Castell qui a su être à mon écoute tout au long de ces trois années. En effet, elle ne m'a pas empêché en première année de parfaire mon éducation politique et militante (bien en repos depuis quelques temps), même si au début de la troisième année, lorsque les soubresauts d'un mouvement social ont commencé à secouer le CMI, elle m'a demandé ce qu'il en serait de mon engagement. Bon Séb, tu comprendras qu'on a tous des côtés sociaux traitres... Mais bien sûr, elle a surtout été présente au plan mathématiques, je n'ai jamais hésité à poser des questions idiotes (s'il en est) en arrivant à l'improviste dans son bureau et elle a su me guider tout au long de mon travail.

Je tiens à remercier Xia Chen et Wolfgang König d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse ainsi que Frank den Hollander, Pierre Mathieu et Zhan Shi d'en être les examinateurs.

Je tiens aussi à remercier tous les membres du laboratoire à qui j'ai pu poser les questions que je voulais, et tout particulièrement Pierre et Clothilde dans le bureau de laquelle j'ai passé un certain nombre d'heures, où c'est souvent moi qui finissais par craquer le premier.

La vie au labo ne se résumant pas seulement à faire des maths, je pense à tous les doctorants que j'ai pu croiser durant ces trois ans, au premier rang desquels se trouvent mes co-bureaux Matias et Ismaël. Car pour passer trois ans ensemble dans une pièce de quinze mètres carrés, il est à mon sens nécessaire pour la survie mentale du groupe (surtout pour des matheux) qu'une bonne ambiance règne, et ce fut le cas. Je pouvais aussi bien discuter de la dernière sortie postée sur Skitour avec Ismaël (il faut que je te parle d'un secret spot) que des derniers exploits de Peñarol en Copa Libertadores en sirotant un maté cela va de soit. Venga Mati ! Je n'oublie pas les autres doctorants du couloir, la dream team sénégalaise qui bat des records de lenteur Resto U-CMI, la fine équipe du bureau 114 pour leur concours de la blague la plus moisie, François ce n'est pas parce que tu es désormais papa qu'il ne faut plus organiser de blind test, Thomas pour avoir été là une bonne partie de l'été lorsque je rédigeais, Séb pour nos interminables discutions politiques et ses jugements toujours mesurés... Et bien sûr Jc notre maître à tous !

Enfin je pense à ma famille, à mes parents qui m'ont toujours soutenu dans les différents choix d'orientations que j'ai fait, à mon frère qui a toujours été à l'écoute et dont l'expérience m'a servi, à ma sœur quelque part au bout du monde et à Sally qui m'y suivra.

Table des matières

CHAPITRE 1

Historique

L'objet de cette thèse est l'étude des grandes déviations pour les temps locaux d'auto-intersections de marches aléatoires. Le premier chapitre est consacré à faire un historique de cette question. Nous commencerons par des rappels sur la théorie des grandes déviations avant de donner les motivations historiques (notamment physiques) de ce type de problème et les premiers résultats sur la question.

1. Grandes déviations

1.1. Fondements. La théorie des grandes déviations s'intéresse à l'étude des événements rares, c'est à dire les événements dont la probabilité de se réaliser est petite. On peut commencer cette présentation par un exemple simple.

Considérons une suite $(X_i, i = 1, \cdots, n)$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi normale centrées réduites. Notons $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{1} X_i$ la moyenne des X_i. La loi des grands nombres nous apprend que presque sûrement, $\bar{X}_n$ converge vers 0. Par conséquent on a pour tout $a > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|\bar{X}_n| \geq a\right) = 0.$$

L'événement $\left\{\bar{X}_n \geq a\right\}$ est donc un événement atypique, on force notre processus à excéder sa moyenne. La théorie des grandes déviations cherche à quantifier plus précisément la probabilité de ce type d'événement. On peut remarquer que dans notre exemple $\bar{X}_n$ suit alors une loi normale centrée et de variance $1/n$. Par conséquent on a,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(|\bar{X}_n| \geq a\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(|\mathcal{N}(0, 1/n)| < a\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(|\mathcal{N}(0,1)| < \sqrt{n}a\right) \\
&= 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{a\sqrt{n}}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.
\end{aligned}$$

On peut aisément encadrer l'intégrale précédente par

$$\left(1 - \frac{1}{a^2 n}\right) \frac{\sqrt{2}}{\pi a\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{a^2 n}{2}\right) \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{a\sqrt{n}}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \leq \frac{\sqrt{2}}{\pi a\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{a^2 n}{2}\right),$$

pour finalement obtenir que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(|\bar{X}_n| \geq a\right) = -\frac{a^2}{2},$$

ou bien encore que

$$\mathbb{P}\left(|\bar{X}_n| \geq a\right) \underset{+\infty}{\sim} \exp\left(-\frac{na^2}{2}\right),$$

où $a_n \underset{+\infty}{\sim} n_n \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

La probabilité pour que le processus $\bar{X}_n$ réalise un événement atypique comme excéder sa moyenne est donc approximativement de $\exp\left(-\frac{na^2}{2}\right)$. Nous avons donc réussi avec cet exemple simple à quantifier la probabilité d'un événement rare, ici qu'une moyenne de gaussiennes centrées dépassent 0. On dira que n est la vitesse de la déviation et que la fonction $a \to a^2/2$ est la fonction de taux de la déviation.

Ce petit calcul nous amène à nous poser plusieurs questions. D'abord, que peut-on dire si l'on se place dans la situation classique des probabilités où la loi des X_i est inconnue mais où les X_i sont indépendantes et identiquement distribuées ? Ensuite, peut-on obtenir des résultats assez généraux si l'on affaiblit encore les hypothèses en ne supposant plus que les variables aléatoires sont indépendantes, mais qu'on a seulement un processus de Markov ? Mais d'abord quel pourrait être l'énoncé rigoureux d'un principe de grandes déviations. Donsker et Varadhan ont introduit l'énoncé rigoureux d'un principe de grandes déviations dans plusieurs articles [**DV75b**],[**DV75a**],[**DV76**]. Cet énoncé est celui aujourd'hui utilisé et nous l'énonçons ici. On renvoie pour toutes les définitions, pour tous les résultats énoncés dans cette cette section et la suivante ainsi que pour leur démonstration à l'ouvrage de Dembo et Zeitouni [**DZ10**]. On se place sur $\mathbf{X}$ un espace topologique muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathbf{X}}$.

DÉFINITION 1.1 (Fonction de taux). *Une fonction $J : \mathbf{X} \to \mathbb{R}^+$ est une fonction de taux si elle est semi-continue inférieurement, c'est à dire si les ensembles de niveaux $\Psi(\alpha) = \{x \text{ tel que } J(x) \leq \alpha\}$ pour $\alpha \geq 0$ sont fermés. On dira que J est une bonne fonction de taux si ces ensembles de niveaux sont compacts.*

DÉFINITION 1.2 (Principe de grandes déviations). *La famille $\{\mu_\epsilon\}$ de probabilités sur $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}})$ satisfait un principe de grandes déviations avec pour fonction de taux J si pour tout $\Gamma \subset \mathcal{B}_{\mathbf{X}}$*

$$-\inf_{x\in\mathring{\Gamma}} J(x) \leq \liminf_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(\Gamma) \leq \limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(\Gamma) \leq -\inf_{x\in\bar{\Gamma}} J(x)$$

L'énoncé d'un principe de grandes déviations peut s'exprimer de manière équivalente comme suit :

DÉFINITION 1.3. *La famille $\{\mu_\epsilon\}$ de probabilités sur $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}})$ satisfait un principe de grandes déviations avec pour fonction de taux J si*

(1) *pour tout ouvert O de $\mathcal{B}_{\mathbf{X}}$,*

$$\liminf_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(O) \geq -\inf_{x\in O} J(x)$$

(2) *pour tout fermé F de $\mathcal{B}_{\mathbf{X}}$,*

$$\limsup_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(F) \leq -\inf_{x\in F} J(x)$$

Cette dernière définition est d'ailleurs plus souvent utilisée.

REMARQUE 1.4. *Il existe une version affaiblie du principe de grandes déviations. On dira que la famille* $\{\mu_\epsilon\}$ *de probabilités sur* $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_\mathbf{X})$ *satisfait un principe de grandes déviations restreint avec pour fonction de taux* J *si la borne supérieure est seulement valable pour des ensembles compacts.*

Revenons maintenant à la première question que nous nous sommes posée, c'est à dire que peut-on dire si l'on considère une suite de variables aléatoires de loi inconnue, mais indépendantes et identiquement distribuées. Un résultat connu souvent sous le nom de Théorème des grandes déviations, dû au mathématicien suédois Harald Cramér répond à cette question. On énonce tout t'abord ce théorème dans le cas de la dimension 1, c'est à dire lorsque les variables aléatoires sont à valeur dans $\mathbb{R}$ où les hypothèses sont un peu plus faibles.

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$. Pour X_1 une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{R}^d$, on note

$$\Lambda(\lambda) = \log \mathbb{E}\left[\exp\left(\langle \lambda, X_1 \rangle\right)\right] \tag{1}$$

la log-Laplace de la loi de X_1 et

$$\Lambda^*(x) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \{\lambda x - \Lambda(\lambda)\}$$

la transformée de Legendre de Λ.

THÉORÈME 1.5 (Théorème de Cramér sur $\mathbb{R}$). *Soit* $(X_i, i = 1, \cdots, n)$ *une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans* $\mathbb{R}$.

(1) *Pour tout fermé* $F \subset \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(\bar{X}_n \in F\right) \leq - \inf_{x \in F} \Lambda^*(x).$$

(2) *Pour tout ouvert* $O \subset \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(\bar{X}_n \in O\right) \geq - \inf_{x \in O} \Lambda^*(x).$$

Dans la version étendue à $\mathbb{R}^d$ de ce théorème, il faut pour que l'énoncé soit correct, supposer en plus que la log-Laplace de la loi de X_1 soit définie sur $\mathbb{R}^d$ en entier. Notons $\mathcal{D}_\Lambda$ le domaine de définition de cette dernière.

THÉORÈME 1.6 (Théorème de Cramér sur $\mathbb{R}^d$). *Soit* $(X_i, i = 1, \cdots, n)$ *une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$. *Si on suppose que* $\mathcal{D}_\Lambda = \mathbb{R}^d$ *alors*

(1) *pour tout fermé* $F \subset \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(\bar{X}_n \in F\right) \leq - \inf_{x \in F} \Lambda^*(x),$$

et

(2) *pour tout ouvert $O \subset \mathbb{R}$,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\left(\bar{X}_n \in O\right) \geq - \inf_{x\in O} \Lambda^*(x).$$

La fonctionnelle Λ^* est un élément central de la théorie des grandes déviations. C'est pourquoi nous énonçons maintenant une proposition qui montre quelques propriétés simples mais intéressantes de celle-ci, et qui seront intéressantes pour la suite de nos travaux.

Proposition 1.7. *La fonction Λ^* est convexe et semi-continue inférieurement.*

Démonstration. Λ^* est semi-continue inférieurement en tant que suprémum de fonctions linéaires. Par ailleurs, soient $u \in [0,1]$ et $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\Lambda^*(ux + (1-u)y) &= \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \{\lambda(ux + (1-u)y) - \Lambda(\lambda)\} \\
&= \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \{u\left(\lambda x - \Lambda(\lambda)\right) + (1-u)\left(\lambda y - \Lambda(\lambda)\right)\} \\
&\leq u\Lambda^*(x) + (1-u)\Lambda^*(y).
\end{aligned}$$

□

Une étape supplémentaire dans le processus de généralisation des résultats de grandes déviations est l'abandon de l'hypothèse d'indépendance au profit de celle plus faible, de processus Markovien. Cette généralisation a été l'objet des travaux de Donsker et Varadhan dans une série d'articles publiés à partir de 1975 [**DV75a**],[**DV76**].

1.2. Outils. On a vu (Théorème 1.5) que sous certaines hypothèses, une suite de variables aléatoires pouvait satisfaire un principe de grandes déviations. Nous présentons dans cette section un certain nombres de critères qui permettent d'obtenir des principes de grandes déviations, et des outils qui autorisent un transfert des principes de grandes déviations. La question du transfert d'un principe de grandes déviations est la suivante. On considère une fonctionnelle et un processus aléatoire satisfaisant un principe de grandes déviations. Quelles conditions doit-on mettre sur la fonctionnelle pour que la fonctionnelle du processus satisfasse à nouveau un principe de grandes déviations.

1.2.1. *Principe de contraction.* Ce principe permet de transférer un principe de grandes déviations connu pour une famille de probabilités $\{\mu_\epsilon\}$, à une nouvelle famille $\mu_\epsilon \circ f^{-1}$ si f est continue dans la topologie où se réalise le principe de grandes déviations. On considère $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ deux espaces topologiques de Hausdorff munis de leur tribus boréliennes $\mathcal{B}_{\mathbf{X}}$ et $\mathcal{B}_{\mathbf{Y}}$.

Théorème 1.8. *Soit $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ une application continue. Si la famille de probabilités $\{\mu_\epsilon\}$ satisfait un principe de grandes déviations sur $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}})$ avec pour fonction de taux J, alors la famille de probabilités $\{\mu_\epsilon \circ f^{-1}\}$ satisfait un principe de grandes déviations sur $(\mathbf{Y}, \mathcal{B}_{\mathbf{Y}})$ avec pour fonction de taux $\tilde{J} : \mathbf{Y} \to \mathbb{R}^+$ définit par*

$$\tilde{J}(y) = \inf \{J(x), x \in \mathbf{X}, f(x) = y\}.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que pour tout ouvert O de $\mathcal{B}_{\mathbf{Y}}$, $f^{-1}(O)$ est ouvert et

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon \circ f^{-1}(O) \geq -\inf \left\{ J(x), x \in f^{-1}(O) \right\} = -\inf \left\{ \tilde{J}(y), y \in O \right\}.$$

On procède de la même manière pour la borne supérieure sur les fermés. □

On peut donc appliquer un principe de contraction pour obtenir un principe de grandes déviations à partir d'un autre principe de grandes déviations sous certaines hypothèses de continuité. Si le principe de grandes déviations est restreint, on ne peut pas obtenir directement la borne supérieure. Par contre, si on a aucune hypothèse de continuité sur la fonction f, on ne peut pas appliquer ce type de méthode. On peut partiellement réussir dans le cas où la fonction f est semi-continue inférieurement (respectivement semi-continue supérieurement) en obtenant la borne inférieure (respectivement supérieure) du principe de grandes déviations.

On peut par exemple "forcer" la borne supérieure en montrant que la famille de probabilités est exponentiellement tendue à l'aide du théorème suivant :

THÉORÈME 1.9. *Si la famille de probabilités $\{\mu_\epsilon\}$ sur $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}})$ satisfait un principe de grandes déviations restreint et si elle est exponentiellement tendue, alors elle satisfait un principe de grandes déviations "entier".*

1.2.2. *Théorème de Gartner-Ellis.* On présente dans ce paragraphe le fameux Théorème de Gartner-Ellis qui offre une généralisation du Théorème 1.5 à un espace topologique $\mathbf{X}$. $\mathbf{X}$ est toujours un espace topologique de Hausdorff. On note $\mathbf{X}^*$ le dual topologique de $\mathbf{X}$, c'est à dire l'ensemble des formes linéaires continues sur $\mathbf{X}$. Pour μ_ϵ une famille de probabilités sur $\mathbf{X}$, on note Λ_{μ_ϵ} la Log-Laplace de μ_ϵ désormais une application de $\mathbf{X}^*$ dans $\mathbb{R}$ définit par :

$$\forall \lambda \in \mathbf{X}^*, \Lambda_{\mu_\epsilon}(\lambda) = \log \int_{\mathbf{X}} \exp\left(\lambda(x)\right) d\mu_\epsilon(x).$$

Nous avons besoin de deux définitions pour énoncer le théorème.

DÉFINITION 1.10 (Tension exponentielle). *La famille de probabilités $\{\mu_\epsilon\}$ sur $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}})$ est dite exponentiellement tendue si pour tout $a \geq 0$, il existe un compact K tel que*

$$\limsup_{\epsilon \to 0} \epsilon \log \mu_\epsilon(K^c) \leq -a.$$

DÉFINITION 1.11 (Gâteaux différentiabilité). *Une application $f : \mathbf{X}^* \to \mathbb{R}$ est dite Gâteaux différentiable si pour tout $\lambda, \theta \in \mathbf{X}^*$ la limite*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\lambda + t\theta) - f(\lambda)}{t}$$

existe.

THÉORÈME 1.12. *Soit $\{\mu_\epsilon\}$ une famille de probabilités sur $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_{\mathbf{X}})$ exponentiellement tendue. Si la limite*

$$\Lambda(\cdot) = \lim_{\epsilon \to 0} \epsilon \Lambda_{\mu_\epsilon}(\cdot/\epsilon)$$

existe, est Gâteaux différentiable et est semi-continue inférieurement par rapport à la topologie faible, alors $\{\mu_\epsilon\}$ satisfait un principe de grandes déviations avec la bonne fonction de taux Λ^*.

REMARQUE 1.13. *Comme on peut le voir ci-dessus, le calcul des moments exponentiels de la famille de probabilités $\{\mu_\epsilon\}$ permet par l'intermédiaire du théorème de Gärtner-Ellis d'obtenir les grandes déviations pour la famille $\{\mu_\epsilon\}$. Néanmoins comme on l'a vu précédemment, la fonctionnelle Λ^* est toujours convexe. Or la fonction de taux d'un principe de grandes déviations ne l'est pas nécessairement. Dans ce cas, l'usage d'une méthode type Gärtner-Ellis peut permettre d'obtenir les bonnes vitesses de déviations mais ne donnera jamais la bonne fonction de taux.*

1.2.3. *Lemme intégral de Varadhan.* Le lemme intégral de Varadhan est un peu la réciproque du théorème de Gärtner-Ellis. En effet celui-ci permet à partir d'un principe de grandes déviations, d'obtenir les asymptotiques des moments exponentiels. On a besoin ici d'une hypothèse un peu plus forte sue l'espace topologique $\mathbf{X}$, puisqu'on suppose que $\mathbf{X}$ est régulier.

THÉORÈME 1.14. *Si la famille $\{\mu_\epsilon\}$ satisfait un principe de grande déviations sur $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_\mathbf{X})$ avec pour bonne fonction de taux J, et si ϕ est une fonction continue bornée de $\mathbf{X}$ dans $\mathbb{R}$, alors*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon \log \int_\mathbf{X} \exp\left(\frac{\phi(x)}{\epsilon}\right) d\mu_\epsilon(x) = \sup\left\{\phi(x) - J(x), x \in \mathbf{X}\right\}.$$

1.2.4. *Principes restreints.* On rappelle qu'un principe de grandes déviations est dit restreint si la borne supérieure n'est seulement valable que sur des ensembles compacts. Dans ce cas, on ne peut utiliser un principe de contraction ou bien encore un lemme intégral de Varadhan. Il est donc souvent utile d'obtenir un principe de grandes déviations "complet". Pour obtenir un principe "complet" à partir d'un principe restreint, il est par exemple possible de "forcer" la borne supérieure en montrant que la famille de probabilités est exponentiellement tendue à l'aide du théorème suivant :

THÉORÈME 1.15. *Si la famille de probabilités $\{\mu_\epsilon\}$ sur $(\mathbf{X}, \mathcal{B}_\mathbf{X})$ satisfait un principe de grandes déviations restreint et si elle est exponentiellement tendue, alors elle satisfait un principe de grandes déviations "entier".*

Une autre solution est d'utiliser un méthode de compactification. En effet, si on considère $(X_t, t \geq 0)$ un processus aléatoire sur $\mathbb{R}^d$ qui satisfait un principe de grandes déviations restreint, alors le processus $(X_t^R, t \geq 0)$ projeté sur le tore de rayon R satisfait un principe de grandes déviations "complet" puisque les ensembles fermés du tore sont compacts.

2. Intersections de marches aléatoires

Nous entrons ici dans le vif du sujet, à savoir les intersections de marches aléatoires. Cette notion n'est pas unique et recouvre un certain nombre de quantités différentes apparues au fil du temps et des différents travaux écrits sur le sujet. Nous commençons donc par introduire différentes quantités liées aux intersections de processus aléatoires qui nous serviront tout au long de ce chapitre. Notons δ_x la fonction telle que $\delta_x(y) = 1$ si $x = y$ et 0 sinon. Soit $(X_t, t \geq 0)$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$. On note :

$$\forall x \in \mathbb{Z}^d,\ l_t(x) = \int_0^t \delta_x(X_s) ds$$

le temps local de la marche à l'état x, qui correspond au temps passé par la marche à l'état x avant l'instant t. On notera

$$\forall p > 1,\ I_t = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} l_t^p(x)$$

le temps local d'auto-intersections. Le temps local d'auto-intersections -quantité qui nous intéresse en premier lieu- mesure dans quelle mesure la trajectoire de la marche s'intersecte. En effet, il est facile de voir que si la marche passe un temps de l'ordre de 1 sur chaque site visité, alors I_t sera de l'ordre de t. Par contre, si la marche reste tout le temps t sur un seul site, alors I_t sera de l'ordre de t^p. Il semble donc bien que le temps local d'auto-intersections mesure les intersections de la marche. Cette affirmation est en fait très claire si p est entier. On peut en effet dans ce cas réécrire I_t sous la forme

$$\begin{aligned} I_t = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} l_t^p(x) &= \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \left(\int_0^t \delta_x(X_s) ds \right)^p \\ &= \int_0^t \cdots \int_0^t \mathbb{1}\left\{X_{s_1} = \cdots = X_{s_p}\right\} ds_1 \cdots ds_p. \end{aligned}$$

On voit alors apparaître les intersections de la marche aléatoire. Cette quantité étant l'objet principal de nos recherches, nous en reparlerons en détail plus tard. On, notera

$$R_t = \mathrm{card}\left\{X_s, 0 \leq s \leq t\right\}$$

le nombre de points distincts visités par la marche avant l'instant t. Historiquement, c'est sans doute la première notion introduite liée aux intersections de processus. Elle est liée aux intersections puisque plus le nombre de points visités par la marche est petit, plus la trajectoire ce cette dernière s'intersecte.

Pour p marches indépendantes $X_t^{(1)}, \cdots, X_t^{(p)}$ on note :

$$Q_t = \int_{[0,t]^p} \mathbb{1}\left\{X_{s_1}^{(1)} = \cdots = X_{s_p}^{(p)}\right\} ds_1 \cdots ds_p$$

le temps local d'intersections mutuelles. Cette quantité mesure les intersections de p marches indépendantes, elle est intimement liée au temps local d'auto-intersections comme le montre l'inégalité suivante :

$$Q_t^{1/p} = \left(\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \prod_{i=1}^p l_t^{(i)}(x) \right)^{1/p} \leq \left(\prod_{i=1}^p \left\| l_t^{(i)} \right\|_p \right)^{1/p} \leq \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \left\| l_t^{(i)} \right\|_p = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \left(I_t^{(i)} \right)^{1/p}. \tag{2}$$

Toujours pour p marches indépendantes, on note

$$J_t = \text{card}\left\{\left\{X^{(1)}_{s_1}, 0 \le s_1 \le t\right\} \cap \cdots \cap \left\{X^{(p)}_{s_p}, 0 \le s_p \le t\right\}\right\}.$$

Cette quantité est le nombre de points communs aux trajectoires de p marches indépendantes. J_t est l'analogue de R_t pour p marches indépendantes.

Certaines de ces notions existent aussi dans le cas de processus continu comme le mouvement Brownien. Soit $(B_t, t \ge 0)$ un mouvement Brownien d-dimensionnel et $p > 1$. Formellement, le temps local d'auto-intersections du mouvement Brownien s'écrit

$$\beta(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^t \delta_x(B_s) ds\right)^p dx. \tag{3}$$

Si cette quantité est bien définie en dimension 1, elle explose dans les dimensions supérieures (voir par exemple Proposition 2.3.5 et 2.3.6 dans [**Che10**]). Néanmoins, dans le cas de la dimension 2, Varadhan [**Var69**] a proposé une méthode de renormalisation basée sur la décomposition géométrique que nous verrons dans la Section 3.1 du Chapitre 2 qui permet de définir le temps local d'auto-intersections comme suit :

$$\gamma(t) = \int\int_{\{0\le r<s\le t\}} \delta_0\left\{W(r) - W(s)\right\} drds - \mathbb{E}\left[\int\int_{\{0\le r<s\le t\}} \delta_0\left\{W(r) - W(s)\right\} drds\right].$$

Malheureusement, cette méthode est propre au cas $p = 2$. La question de l'existence du temps local d'auto-intersections renormalisé pour des valeurs de p autres que 2 a été traité dans le courant des années quatre-vingt par différents auteurs. Dynkin [**Dyn84**] en application de son célèbre théorème d'isomorphisme dont nous utilisons une version dans nos preuves (Cf Théorème 4.1 du Chapitre 3), donne l'existence du temps local renormalisé. Viendront ensuite d'autres méthodes proposées par Rosen [**Ros86**], Dynkin à nouveau [**Dyn86**],[**Dyn88a**],[**Dyn88b**], Le Gall [**LG90**] et Rosen et Yor [**RY91**] dans le cas $p = 3$.

Pour p mouvements Browniens indépendants $B^{(1)}_t, \cdots, B^{(p)}_t$ et $A \subset (\mathbb{R}^+)^p$ on note

$$\alpha(A) = \int_A \prod_{k=2}^{p} \delta_0\left(B^{(k-1)}_{s_{k-1}} - B^{(k)}_{s_k}\right) ds_1 \cdots ds_p$$

le temps local d'intersections mutuelles durant l'intervalle de temps A. C'est l'analogue de J_t pour le mouvement Brownien.

2.1. Les premiers travaux. Les premiers travaux liés aux intersections de processus sont sans doute dus à Erdős. Dès 1950 il s'intéresse avec Dvoretzki [**DE51**] au nombre de points visités par une marche aléatoire avant l'instant t. Puis en 1960 il travaille avec Taylor sur les possibles points communs d'une marche considérée sur deux intervalles de temps distincts [**ET60a**], et sur le nombre de retour à l'origine d'une marche [**ET60b**]. Les intersections du mouvement Brownien l'intéressent tout autant puisque parallèlement il étudie avec Dvoretzki et Kakutani les points doubles du mouvement Brownien [**DEK50**], les points multiples [**DEK54**],[**DEK58**] et les points triples [**DEKT57**].

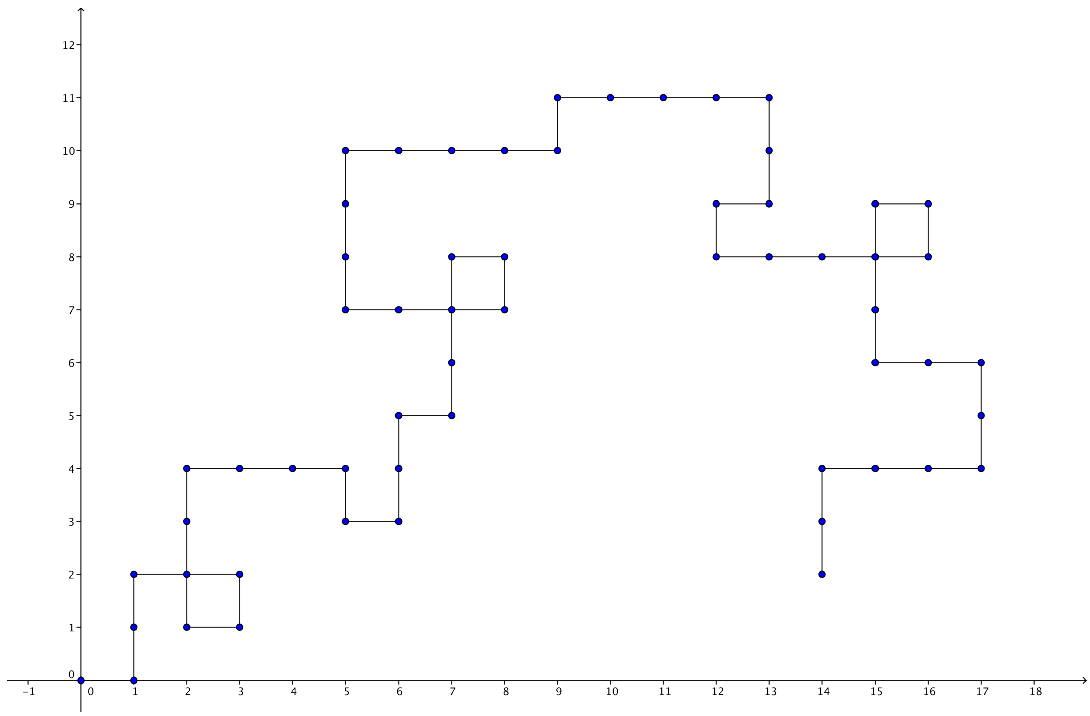


Figure 1. Marche avec peu d'intersections

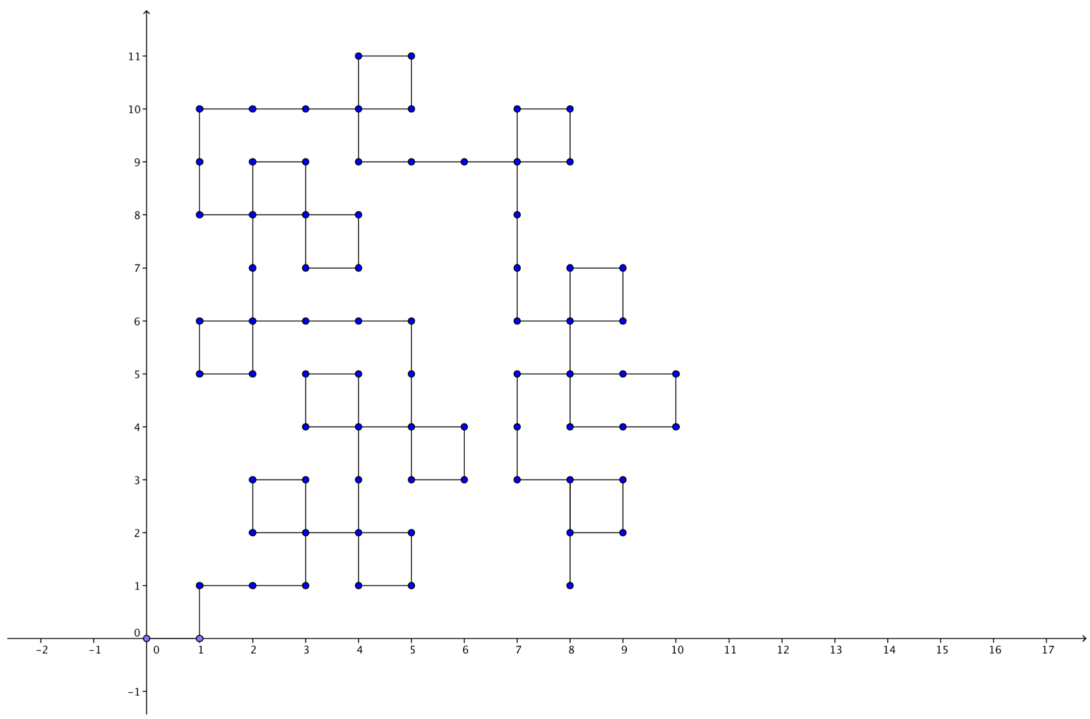


Figure 2. Marche avec beaucoup d'intersections

A partir de 1975, ces questions ne vont plus cesser d'être traitées. Donsker et Varadhan en 1975 travaillent sur la saucisse de Wiener [**DV75c**]. Celle-ci est un cylindre de rayon $\epsilon > 0$ centré sur la trajectoire d'un mouvement Brownien. Les auteurs s'intéressent au volume occupé par le cylindre pendant un temps t. Cette quantité mesure les intersections du mouvement Brownien puisque plus le volume est petit plus la trajectoire de la saucisse s'est recoupée. Ils montrent dans cet article la convergence des moments exponentiels qui, comme on l'a vu sont reliés aux grandes déviations. Puis en 1978, c'est le nombre de points visités par une marche aléatoire avant l'instant t qui est l'objet de leurs travaux [**DV79**]. A nouveau les auteurs montrent la convergence des moments exponentiels. Parallèlement Wolpert [**Wol78**] détermine la dimension de Hausdorff de l'intersection de k mouvements Brownien plans indépendants.

Un peu plus tard au milieu des années quatre-vingt, Geman, Horowitz et Rosen [**GHR84**] ont construit le temps local d'intersections du mouvement Brownien dans le plan en faisant tendre le rayon de la saucisse de Wiener vers 0. A la suite de cet article Le Gall travaille beaucoup sur le sujet et écrit toute une série d'article sur la saucisse de Wiener et les intersections du mouvement Brownien. Dans [**LG86c**] il prouve la convergence de l'intersection de deux saucisses de Wiener vers le temps local d'intersection de deux Browniens indépendants. Dans [**LG86a**], il montre que correctement renormalisé, le nombre de points communs à la trajectoire de deux marches indépendantes convergent en dimension $1, 2$ et 3 vers le temps local d'intersection mutuelles de deux mouvements Browniens indépendants. Dans [**LG86b**] il étudie le cas critique de la dimension 4 où la convergence se fait vers une distribution Gaussienne. Yor travaille également activement sur le sujet. Dans [**Yor85b**] il prouve une formule de type Tanaka pour le temps local d'intersections du mouvement Brownien et l'applique pour retrouver la renormalisation de Varadhan [**Var69**]. Dans [**Yor85a**], il prouve une version analogue affaiblie de cette renormalisation en dimension 3. On peut aussi citer [**Yor86**] où l'auteur réécrit le temps local d'intersections sous forme d'intégrale stochastique. On voit donc que toutes ces questions liées aux intersections de processus ont été largement et depuis longtemps étudiées. Tout ces travaux étaient motivés par des problèmes physiques que nous allons présenter dans les sections suivantes.

2.2. Les modèles de polymères. Les motivations d'étude des temps locaux d'intersections proviennent pour partie de modèles physiques tels les modèles de polymères. Un polymère est une longue chaîne de monomères. On peut modéliser chaque monomère par une variable aléatoire $(Y_i, i = 1, \cdots, N)$ correspondant à l'incrément d'une marche aléatoire. La marche aléatoire $X_N = \sum_{i=1}^{N} Y_i$ ainsi construite modélise le polymère. Physiquement, un polymère ne peut se recouper. Si un site de l'espace est occupé par un des monomères, un autre ne peut l'occuper. Cet impératif physique est appelé par les physiciens le "volume exclu". Ce phénomène a commencé à être étudié par les physiciens Temperley [**Tem56**], Fisher et Sykes [**FS59**], Domb [**Dom60**] qui commencent à relier cette question au modèle d'Ising, avant que de Gennes [**dG72**] mais aussi des Cloizeaux [**dC72**] ne comprennent véritablement les liens entres le "volume exclu" et la théorie quantique des champs. Naturellement, le premier modèle qui vient à l'esprit pour étudier ce phénomène du "volume exclu" est celui de la marche auto-évitante, puisque celle-ci ne se recoupe pas. Malheureusement ce modèle du fait du caractère non Markovien de la marche est assez difficile à étudier, en particulier dans les dimensions petites qui intéressent en particulier les physiciens (excepté le cas de la dimension 1 qui est trivial). Par ailleurs, il a commencé à apparaître qu'une compréhension des intersections des marches aléatoires permettraient de mieux comprendre les marches auto-évitantes. On a donc commencé à s'intéresser aux intersections de processus.

Au cours des années soixante, des modèles dits de marches aléatoires faiblement auto-évitantes, affaiblissant cette interdiction faite au polymère de se recouper sont introduits. Edwards introduit en 1965 [**Edw65**] un modèle continu de polymère. Le polymère est ici modélisé par un processus continu regardé sur l'intervalle de temps $[0, 1]$, typiquement un mouvement Brownien. Pour $a > 0$, la mesure considérée ν a une densité par rapport à la mesure de Wiener μ :

$$\frac{d\nu}{d\mu} = \frac{\exp(-a\beta(1))}{\mathbb{E}[\exp(-a\beta(1))]}$$

où $\beta(1)$ est définit par (3). Comme on l'a vu précédemment, cette quantité n'existe pas toujours et nous considérons ici son écriture purement formelle. La mesure pénalise les intersections du Brownien mais ne les interdit pas. On notera que Symanzik [**Sym69**] a introduit le même type de modèle pour étudier le Boson de Higgs. On renvoie à l'article de Westwater [**Wes80**], au livre de Lawler (section 6.4 de [**Law91**]) et à Madras et Slade [**MS93**] pour plus de précision. Les premiers articles de Donsker et Varadhan sur la saucisse de Wiener [**DV75b**] et [**DV75c**] ont d'ailleurs été motivé par ces liens entre théorie quantique des champs et intersections de mouvements Browniens que nous venons d'entrevoir.

Un analogue discret du modèle d'Edwards est le modèle de Domb-Joyce introduit en 1972 [**DJ72**]. Le polymère est ici modélisé par une marche aléatoire simple

$$X_N = \sum_{i=1}^{N} Y_i$$

où les Y_i sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées représentant chaque monomère. Une interaction répulsive ω est mise à chaque fois que la chaine s'intersecte, pénalisant ainsi les intersections du polymère. Ce modèle peut-être interprété [**BS95**] en terme d'auto-intersections. Pour $a > 0$, cela revient à étudier la mesure

$$\frac{1}{(2d)^N} \frac{\exp(-aI_N)}{\mathbb{E}[\exp(-aI_N)]}$$

sur l'ensemble des marches aux plus proches voisins. Celle-ci favorise les marches avec peu d'intersections de la même manière que l'interaction répulsive ω pénalisait les intersections. On remarque que si $a = 0$, on retombe sur la marche aléatoire simple et que si $a \to +\infty$, on a un modèle de marche aléatoire auto-évitante. On renvoie à Barrett pour une introduction physique du modèle [**Bar90**] et à Brydges et Slade [**BS95**] ou Lawler (section 6.4 de [**Law91**]) pour une vision plus mathématique. Récemment, beaucoup de résultats ont été obtenu pour ce type de modèle, notamment en utilisant des méthodes de type développement en dentelles. En ce qui concerne les marche faiblement auto-évitantes, différents théorèmes limites ont été obtenues par van der Hofstad, den Hollander et Slade pour des dimensions plus grande que 5 dans [**vdHdHS98**] et par van der Hofstad pour la dimension 1 dans [**vdH01**]. Le cas de la dimension 4 est traité par Brydges et Slade dans un article tout récent [**BS10**] utilisant des méthodes de renormalisation de groupes. Les marches auto-évitantes ont aussi été traitées à l'aide de développement en dentelles afin de prouver différents théorèmes limites. On peut citer pour les dimensions plus grandes que 5 Hara et Slade [**HS92b**] et [**HS92a**], puis Holmes, Járai, Sakai et Slade [**HJSS04**] et van der Hofstad et Slade [**vdHS03**]. Dans un des travaux qui a mené à la médaille Fields de 2006, Lawler, Schramm et Werner ont proposé des conjectures pour des limites d'échelles de marches aléatoires auto-évitantes en dimension 2 dans [**LSW04**].

Par la suite, on a pu rajouter des poids aléatoires aux intersections dans le but de modéliser différents phénomènes. On regarde alors l'Hamiltonien

$$H_N = \sum_{i<j} \omega_i \omega_j \ \mathbb{1}_{X_i = X_j}.$$

A nouveau la mesure considérée est pour $a \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\exp(-aH_N)}{\mathbb{E}\left[\exp(-aH_N)\right]}.$$

La littérature sur le sujet est très développée et notre but ici n'est pas d'essayer d'être exhaustif, mais on peut citer sur ce sujet l'article de Derrida, Griffiths et Higgs [**DGH92**] pour des charges gaussiennes, de Derrida et Higgs [**DH94**] pour des charge de type Bernoulli, ou encore celui de Kantor et Kardar [**KK91**] pour des charges correspondant à un modèle électrique valant ± 1. On peut citer l'article de van der Hodstad et König [**vdHK01**] pour un résumé (ancien maintenant) des résultats.

On peut conclure de ces différents modèles physiques que l'étude des grandes déviations pour les temps locaux d'auto-intersections est intéressante dans deux principales directions. D'une part, les intersections de processus apparaissent naturellement de modèles physiques, et d'autre part les physiciens sont tout particulièrement intéressés par l'étude des moments exponentiels des temps locaux d'intersections. Or nous avons vu dans la section 1.2.2 le lien étroit qui existe entre asymptotique des moments exponentiels et principe de grandes déviations.

2.3. Les marches aléatoires en paysages aléatoires. Nous avons vu que les temps locaux d'intersections pouvaient être des outils de modélisations de phénomènes physiques, mais ils peuvent aussi apparaître comme conséquence de l'imagination des mathématiciens. Introduisons tout d'abord la définition suivante.

Définition 2.1. *Un processus* $(X_t, t \geq 0)$ *est dit auto-similaire de paramètre* $\delta > 0$ *si pour tout* $c > 0$*, les processus* $(X_{ct}, t \geq 0)$ *et* $(c^\delta X_t, t \geq 0)$ *sont égaux en loi.*

A la fin des années septante, Kesten et Spitzer à l'ouest [**KS79**], et Borodin à l'est la même année [**Bor79a**] et [**Bor79b**] introduisent un nouveau modèle dit de marches aléatoires en paysages aléatoires. Leur but était de construire de nouveaux processus auto-similaires. Commençons par décrire ce modèle. Considérons un individu se déplaçant aléatoirement sur le réseau $\mathbb{Z}^d$ selon une marche aléatoire $(X_t, t \geq 0)$. On place sur le réseau $\mathbb{Z}^d$ un champs aléatoire indépendant et identiquement distribué indépendant de la marche. A chaque fois qu'il visite le sommet z pour la première fois, il tire au hasard selon la loi Y_z la somme qu'il va devoir payer ou recevoir. On s'intéresse à la somme perçue ou dépensée par notre joueur. Cette quantité est donnée par la variable

$$Z_t = \int_0^t Y(X_s)ds.$$

Il est facile de remarquer que

$$Z_t = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} Y(z) l_t(z).$$

Si l'on suppose de plus que $(Y_z, z \in \mathbb{Z}^d)$ est un champs centré de variance 1, alors conditionnellement à la marche, $\mathrm{Var}(Z_t) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} l_t(z)^2 = I_t$. Le temps local d'auto-intersection apparaît donc comme la variance conditionnelle du processus considéré. Un certain nombre de résultats ont été obtenus sur ce type de processus comme des théorèmes de la limite centrale [**KS79**],[**Bor79a**],[**Bor79b**],[**Bol89**], [**DU10**], des théorèmes limites locaux [**CGPS10**], [**CGP11**] et des résultats de grandes déviations [**AC07a**],[**AC07b**], [**GKS07**], [**FMW08**], [**Ass08**],[**Ass09**]. On voit d'ailleurs dans ces papiers toute l'importance d'avoir une bonne compréhension du temps local d'auto-intersections pour étudier ce type de marches aléatoires. Ce modèle a été simultanément introduit par les physiciens Matheron et de Marsily pour l'étude d'écoulements aléatoires en milieux stratifiés. Ce modèle a des liens profonds avec les modèles physiques de sources aléatoires ou de spins dépolarisés en champs aléatoires. On renvoie le lecteur intéressé à l'article de Le Doussal [**LD92**] pour une introduction précise de ces modèles.

2.4. Plus récemment : Loi des grands nombres et théorème central limite. Nous allons dans cette partie présenter les principaux résultats connus aujourd'hui sur le temps local d'auto-intersections de marches aléatoires à l'exception des résultats de type grandes déviations qui feront l'objet du Chapitre suivant. Ces résultat ont parfois été prouvé dans le cas du temps discret et d'autres fois dans le cas du temps continu. Pour clarifier cette présentation, nous avons fait le choix de donner tous les résultats dans le cas du temps continu. De plus, nous sommes convaincus que ces résultats sont valables dans les deux cas, discret et continu. On commence par donner les résultats dans le cas des marches à variance finie.

2.4.1. *Marches à variance finie.* Si les ordres de grandeurs sont connus depuis longtemps, les constantes exactes elles le sont depuis peu et encore pas dans le cas de la dimension 1. En effet, pour la dimension 1, on sait que la marche est récurrente, et on peut affirmer qu'on a l'équivalent suivant :

$$I_t \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{(p+1)/2}.$$

Cependant, il n'existe pas de loi forte des grands nombres. Le résultat le plus aboutit est le suivant :

THÉORÈME 2.2. *Soit* $(X_t, t \geq 0)$ *une marche aléatoire définit sur* $\mathbb{Z}$ *dont l'incrément est de moyenne nulle et de variance* σ^2. *Quelque soit* $p > 0$,

$$\frac{1}{t^{(p+1)/2}} \sum_{x\in\mathbb{Z}} l_t(x)^p \xrightarrow{d} \frac{1}{\sigma^{p-1}}\beta(1).$$

Ce résultat prouvé par Chen et Li dans [**CL04**] n'est pas non plus un véritable théorème central limite.

Dans le cas de la dimension 2, la marche est toujours récurrente mais celle-ci a plus d'espace pour se déplacer. Ainsi la valeur typique du temps local d'auto-intersections sera plus faible que dans le cas de la dimension 1. Černy a prouvé dans [**Čer07**] la loi forte suivante :

THÉORÈME 2.3. *Soit* $(X_t, t \geq 0)$ *une marche aléatoire centrée de* $\mathbb{Z}^2$ *de matrice de covariance* Σ. *Alors* $\forall p \geq 0$,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{I_t}{t\,(\log t)^{p-1}} = \frac{\Gamma(p+1)}{\left(2\pi\sqrt{det\Sigma}\right)^{p-1}} \ p.s,$$

où Γ *est la fonction Gamma usuelle.*

Dans le cas de la dimension 1, nous avions la convergence en loi du temps local d'auto-intersections. Pour la dimension 2, ce sera toujours le cas mais le temps local d'auto-intersection du Brownien n'existe plus formellement. On a vu que l'on pouvait néanmoins s'en sortir en utilisant par exemple la renormalisation due à Varadhan [**Var69**]. Dans cette optique, Stoll [**Sto89**] obtient un théorème central limite pour I_t dans le cas $p = 2$ puis Rosen [**Ros90**] généralise le résultat avec le théorème suivant :

THÉORÈME 2.4. *Soit* $(X_t, t \geq 0)$ *une marche aléatoire symétrique sur* $\mathbb{Z}^2$ *de matrice de covariance* Γ.

$$\frac{1}{t}\left(I_t - \mathbb{E}[I_t]\right) \xrightarrow{d} \frac{1}{\sqrt{\det\Gamma}}\alpha([0,1]^p)$$

REMARQUE 2.5. *Notons pour être complet que Dynkin a démontré un théorème équivalent pour un autre type d'intersection et une autre renormalisation du temps local d'auto-intersection du Brownien (*[**Dyn88a**] *et* [**Dyn88b**]*).*

Pour les dimensions supérieures à 3, la marche est transitoire. Typiquement, elle passe un temps 1 sur chaque sommet visité. On a donc $I_t \sim t$. Becker et König ont récemment prouvé la loi forte des grands nombres suivante [**BK09**] :

THÉORÈME 2.6. *Soit* $(X_t, t \geq 0)$ *une marche aléatoire centrée de* $\mathbb{Z}^d$ *avec* $d \geq 3$. *Notons* γ *la probabilité de non retour à l'origine, c'est à dire* $\mathbb{P}(X_t \neq 0, \forall t \geq 1)$. *Alors* $\forall p \geq 0$,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{I_t}{t} = \gamma^2 \sum_{k=1}^{+\infty} k^p (1-\gamma)^{1-k} \ p.s.$$

On notera pour être complet que ces résultats ont été prouvé quelque soit $p \geq 0$. Le cas $p = 1$ est trivial et le cas $p = 0$ correspond au nombre de points visités par la marche aléatoire qui a été traité par Dvoretzki et Erdős [**DE51**] et par Spitzer [**Spi64**].

Pour les dimensions plus grande que 3, la convergence ne se fait plus vers le temps local d'auto-intersections du mouvement Brownien mais vers une loi Gaussienne. Chen [**Che08**] puis Asselah [**Ass10**] (pour $d \geq 4$) ont récemment obtenu par des méthodes différentes le théorème central limite suivant :

THÉORÈME 2.7. *Soit* $(X_t, t \geq 0)$ *une marche aléatoire symétrique sur* $\mathbb{Z}^d$ *de matrice de covariance* Γ. U *une Gaussienne centrée réduite. Pour* $d = 3$ *et* $p = 2$,

$$\frac{1}{\sqrt{t \log t}} \left(I_t - \mathbb{E}[I_t]\right) \xrightarrow{d} \lambda_1 U.$$

Pour $d \geq 4$ *et* $p = 2$,

$$\frac{1}{\sqrt{t}} \left(I_t - \mathbb{E}[I_t]\right) \xrightarrow{d} \lambda_2 U$$

où $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi^2 \det \Gamma}}$, $\lambda_2 = \sqrt{3G(0)^2 + G(0) + 2 \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} G(x)^3}$ *et* G *est la fonction de Green de la marche, c'est à dire* $G(x) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X_t = x) dt$.

Voilà ce qu'actuellement on peut dire pour des résultats du type loi des grands nombres et théorème central limite pour le temps local d'auto-intersections de marches aléatoires à variance finie. Nous nous sommes dans nos travaux intéressés au cas nettement moins étudié des marches α-stables. Nous énonçons maintenant des résultats analogues pour ce type de marches.

2.4.2. *Marches α-stables.* Rappelons tout d'abord ce qu'est un processus α-stable.

DÉFINITION 2.8 (Processus α-stable). *Une variable aléatoire* Y *est dite stable si pour tout* k, *il existe des variables aléatoires indépendantes*$Y_1, \cdots, Y_k$ *de même loi que* Y *et des constantes* $a_k > 0, b_k$ *telles que*

$$Y_1 + \cdots + Y_k \stackrel{d}{=} a_k Y + b_k.$$

On peut alors montrer que nécessairement $a_k = k^\alpha$ *où* $\alpha \in]0, 2]$.

On peut alors associer à chaque variable aléatoire α-stable Y un processus de Lévy (processus à incréments stationnaires et indépendants) (voir par exemple Section 2 du Chapitre 3 de [**RY99**]) qui est aussi appelé processus α-stable.

Définition 2.9. *On dit que* $b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *est une fonction à variation régulière d'ordre* a *si pour tout* $t > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{b(tx)}{b(x)} = x^a.$$

Définition 2.10. *Soit* $(U_t, t \geq 0)$ *un processus* α*-stable. Soit* $b(t)$ *une fonction à variation régulière d'ordre* $1/\alpha$*. On dit que la marche aléatoire* $(X_t, t \geq 0)$ *est dans le domaine d'attraction d'un processus* α*-stable si*

$$\frac{1}{b(t)} X_t \xrightarrow[t\to+\infty]{d} U_1.$$

On parlera de marche α-stable lorsque la marche aléatoire est dans le domaine d'attraction d'un processus α-stable. On renvoie à Le Gall et Rosen [**LGR91**] une introduction à ce type de marches. Pour se faire une idée du comportement de ces marches, on peut voir que la queue de distribution de ce type de marche est de l'ordre de $t^{-\alpha}$. En d'autres termes, pour tout $\epsilon > 0$, l'incrément de la marche a un moment d'ordre $\alpha - \epsilon$. C'est à dire que plus α est petit, plus la marche a tendance à sauter loin. Ainsi lorsque $\alpha \in]0, 1[$, la marche saute en moyenne à l'infini. Cela se traduit en terme de récurrence/transience par le fait que ces marches sont récurrentes si $\alpha > d$ et transitoire si $\alpha < d$. Nous allons maintenant donner des résultats du type loi des grands nombres et théorème central limite pour le temps local d'auto-intersections de ce type de marches. Il y a comme dans le cas des marches à variances finies (cas $\alpha = 2$) trois régimes. Dans le cas où $\alpha > d$, on rappelle que la marche est récurrente, on a nécessairement $d = 1$ et

$$I_t \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{p-\frac{p-1}{\alpha}}. \tag{4}$$

On remarque que cette estimée est croissante en α. C'est tout à fait logique puisque plus α est grand, moins la marche saute loin et donc plus elle aura tendance à s'intersecter. Nous avons cependant un résultat plus précis. Comme corollaire d'un résultat de Kesten et Spitzer (Lemme 6 dans [**KS79**]), on a le théorème suivant :

Théorème 2.11. *Soit* $(X_t, t \geq 0)$ *une marche aléatoire* α*-stable symétrique de* $\mathbb{Z}$ *avec* $\alpha > 1$*. Alors* $\forall p \in]0, 2]$,

$$\frac{1}{t^{p-(p-1)/\alpha}} I_t \xrightarrow{d} \beta(1).$$

Récemment, Chen et Li en collaboration avec Rosen (Lemme 14 dans [**CLR05**]) ont prouvé le résultat plus fort suivant :

Théorème 2.12. *Soit* $(X_t, t \geq 0)$ *une marche aléatoire* α*-stable symétrique de* $\mathbb{Z}$ *avec* $\alpha > 1$ *et* b_t *sa fonction à variation lente d'ordre* α *associée. Notons*

$$\tilde{l}_t(x) = \frac{b_t}{t} l_t(\lfloor b_t x \rfloor)$$

version rééchelonée de l_t*. Alors*

$$\tilde{l}_t \xrightarrow{d} L_1,$$

où L_1 *est le temps local du processus* α*-stable* $(U_t, t \geq 0)$ *arrêté au temps* 1.

On peut noter qu'il est possible de montrer que L_1 existe quand $\alpha > 1$.

Dans le théorème, $\tilde{l}$ est vue comme une variable aléatoire de $\mathbb{Z}$ dans $L_1(\mathbb{R})$. Comme corollaire de ce résultat, les auteurs retrouvent le Théorème 2.11 pour $p > 1$.

Le cas $\alpha = d$ recouvre en fait les deux cas $\alpha = d = 1$ et $\alpha = d = 2$. Ce sont des cas limites où la marche est parfois récurrente et parfois transitoire (cela dépend du choix de la fonction à variations lentes). Cependant, l'estimée suivante est toujours valable :

$$I_t \underset{t\to+\infty}{\sim} t\,(\log t)^{p-1}\,.$$

Tour récemment, dans [**CGP11**] (Lemme 4) Castell, Guillotin-Plantard et Pène ont prouvé une loi des grandes nombres dans ce cas. On note Γ la fonction Gamma usuelle.

THÉORÈME 2.13. *Pour $(X_t, t \geq 0)$ une marche aléatoire α-stable symétrique de $\mathbb{Z}^d$.*

(1) *Si $\alpha = d = 1$ alors $\forall p > 0$,*

$$\frac{1}{t(\log t)^{p-1}} I_t \xrightarrow{a.s.} \frac{\Gamma(p+1)}{(\pi a)^{p-1}},$$

où a est le paramètre de la loi de Cauchy limite.

(2) *Si $\alpha = d = 2$, on note Σ la matrice de covariance de la marche aléatoire. Alors $\forall p > 0$,*

$$\frac{1}{t(\log t)^{p-1}} I_t \xrightarrow{a.s.} \frac{\Gamma(p+1)}{(2\pi\sqrt{\det\Sigma})^{p-1}}.$$

Dans le cas où $\alpha < d$, la marche est transitoire et passe un temps de l'ordre de 1 sur chaque état visité. L'estimée ne dépend donc ni de d ni de α ni de p et on a

$$I_t \underset{t\to+\infty}{\sim} t.$$

On peut trouver dans l'introduction d'un article de Kesten et Spitzer [**KS79**] que pour une marche aléatoire α-stable symétrique $(X_t, t \geq 0)$, pour $d = 1$ et $\alpha < d$,

$$\forall p > 0, \frac{1}{t} I_t \xrightarrow{a.s.} \mathbb{E}\left[\tilde{l}_\infty(0)^{p-1}\right],$$

où $\tilde{l}$ est le temps local de la marche aléatoire $(S_t, t \in \mathbb{R})$ définit pour les temps négatif par $(S_t, t \leq 0)$ la marche aléatoire retournée en temps.

REMARQUE 2.14. *Considérons le cas de la dimension* 1. *On peut voir que si l'on fait $\alpha \to 1$ dans l'équation 4, on obtient $I_t \sim t$. On a donc bien en fait une sorte de continuité dans les estimées du temps local d'auto-intersection avec un facteur logarithmique transitionnel dans le cas critique $\alpha = 1$. Il n'y a donc pas de saut comme pouvait le laisser croire les estimées dans le cas à variance finie.*

3. Un mot sur les intersections mutuelles

Une quantité connexe aux auto-intersections est les intersections mutuelles. Pour $X_i^{(1)}, \cdots, X_i^{(p)}$ p marches indépendantes, on rappelle que le temps local d'intersections mutuelles est donné par

$$\begin{aligned} Q_n &= \sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{n} \mathbb{I}\left\{X_{i_1}^{(1)} = \cdots = X_{i_p}^{(p)}\right\} \\ &= \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \sum_{i_1,\cdots,i_p=1}^{n} \mathbb{I}\left\{X_{i_1}^{(1)} = x\right\} \cdots \mathbb{I}\left\{X_{i_p}^{(p)} = x\right\} \\ &= \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} l_n^{(1)}(x)\cdots l_n^{(p)}(x). \end{aligned}$$

Par indépendance, on peut facilement voir que

$$\mathbb{E}[Q_n] = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{E}\left[l_n^{(1)}(x)\right]^p = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} G_n(x)^p,$$

où $G_n(x) = \mathbb{E}\left[l_n^{(1)}(x)\right]$.

L'ordre de grandeur de Q_n est sensiblement différent de celui de I_n. Néanmoins, comme nous le verrons pour le temps local d'auto-intersections dans le Chapitre suivant, trois cas apparaissent. Le cas sur-critique $p(d-2) > d$, le cas critique $p(d-2) = d$ et le cas sous-critique $p(d-2) < d$. De l'estimée $G(x) = O(|x|^{2-d})$ (où $G(x) = \lim_{n\to+\infty} G_n(x)$ si la limite existe), on a que $\mathbb{E}[Q_\infty] = O\left(\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} G_n(x)^p\right) < +\infty$ lorsque $p(d-2) > d$. Ainsi Q_∞ est fini presque sûrement dans le cas sur-critique.

Le cas critique $p(d-2) = d$ est en fait composé des deux cas $p = 2$, $d = 4$ et $p = 3$, $d = 3$. Erdős et Taylor [**ET60a**] ont très tôt montré que dans ces cas là, Q_∞ est infini. Plus récemment, dans le cas $d = 4$, $p = 2$, Marcus et Rosen [**MR97**] ont prouvé la loi du logarithme itérée suivante :

Théorème 3.1. *Soient $(X_n^{(1)}, n \in \mathbb{N})$ et $(X_n^{(2)}, n \in \mathbb{N})$ deux marches aléatoires de $\mathbb{Z}^4$, indépendantes identiquement distribuées symétriques, ayant des moments d'ordre trois et une matrice de covariance Γ. On a*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{Q_n}{\log n \log_3 n} = \frac{1}{2\pi^2 \det(\Gamma)^{1/2}}.$$

Dans la lignée de cet article Rosen [**Ros97**] a étudié le cas $d = 3$, $p = 3$. Il obtient une loi du logarithme itérée équivalente :

Théorème 3.2. *Soient $(X_n^{(1)}, n \in \mathbb{N})$, $(X_n^{(2)}, n \in \mathbb{N})$, $(X_n^{(3)}, n \in \mathbb{N})$ trois marches aléatoires symétriques de $\mathbb{Z}^3$, identiquement distribuées, ayant une matrice de covariance Γ et tels que $\mathbb{E}[|X_1^{(1)}|^2 \log_+ |X_1|] < +\infty$. On a*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{Q_n}{\log n \log_3 n} = \frac{1}{\pi \det(\Gamma)}$$

Dans le cas sous-critique $p(d-2) < d$, Chen (Théorème 5.3.2 dans [**Che10**]) a obtenu la loi des grands nombres et le théorème central limite suivant :

THÉORÈME 3.3. *Pour* $X_i^{(1)}, \cdots, X_i^{(p)}$ *p marches indépendantes identiquement distribuées, symétriques de matrice de covariance* Γ*. Si* $p(d-2) < d$*, alors*

$$n^{-\frac{2p-d(p-1)}{2}} Q_n \xrightarrow{d} \det(\Gamma)^{-\frac{p-1}{2}} \alpha\left([0,1]^p\right).$$

CHAPITRE 2

Grandes déviations pour les temps locaux d'auto-intersections

On commence dans ce chapitre à s'intéresser de plus près au temps local d'auto-intersections de marches aléatoires. On donne dans un premier temps des heuristiques assez grossières, puis on présente les résultats actuellement connus et enfin on expose les différentes méthodes de preuves proposées par les auteurs sur la question.

1. Heuristiques sur les vitesses de déviations et les stratégies

Considérons une marche aléatoire symétrique, apériodique et à variance finie sur $\mathbb{Z}^d$, notée $(X_t, t \geq 0)$. Comme nous nous intéressons aux grandes déviations du temps local d'auto-intersections, on cherche à quantifier $\mathbb{P}(I_t \geq b_t^p)$ pour $b_t^p \gg \mathbb{E}[I_t]$. Compte tenu des ordres de grandeur du temps local d'auto-intersection I_t que nous avons vu dans la Section 2.4 du chapitre précédent, cela revient à regarder $b_t^p \gg t^{(p+1)/2}$ en dimension 1, $b_t^p \gg t(\log t)^{p-1}$ en dimension 2 et $b_t^p \gg t$ en dimension 3. Par ailleurs, on a vu que plus la marche passait du temps en un petit nombre de sites, plus son temps local d'auto-intersection était grand. Une stratégie pour la marche pour faire grossir son temps local d'auto-intersection serait donc de se localiser durant un temps τ dans une boule de rayon R afin de favoriser ses intersections. Comme une marche à variance finie atteint le bord d'une boule de rayon R en approximativement R^2 unité de temps, la probabilité qu'elle en sorte avant le temps τ est de l'ordre de $\exp(-\tau/R^2)$. Voyons maintenant le gain en termes d'intersections. On peut estimer grossièrement que durant ce temps τ, la marche passe un temps τ/R^d dans les R^d sites de la boule de rayon R. Par conséquent

$$I_t \sim R^d \left(\tau/R^d\right)^p = \tau^p R^{d(1-p)}.$$

Il ne nous reste plus qu'à optimiser cette quantité en τ et R. D'une part on choisit $b_t^p = I_t = \tau^p R^{d(1-p)}$ puisque c'est le moins coûteux pour la marche, ce qui nous donne $\tau = b_t R^{d/q}$ où q est le conjugué de p. La probabilité que la marche reste localisée dans la boule de rayon R durant un temps τ est désormais donnée par

$$\exp(-\tau/R^2) = \exp(-b_t R^{d/q-2}).$$

On cherche maintenant à maximiser cette probabilité en R. Il y a donc 3 cas possibles :

(1) Cas sous-critique : $d/q - 2 < 0 \Leftrightarrow p(d-2) < d$.

Il faut donc ici choisir R maximum. Comme $R = \left(\frac{\tau}{b_t}\right)^{q/d}$, on choisit la valeur de τ maximum, c'est à dire t. Ainsi, en localisant la marche pendant tout le temps t dans une boule de rayon $\left(\frac{t}{b_t}\right)^{q/d}$, on a

$$\mathbb{P}(I_t \geq b_t^p) \sim \exp\left(-t^{(d-2q)/d} b_t^{2q/d}\right).$$

(2) Cas critique : $d/q - 2 = 0 \Leftrightarrow p(d-2) = d$. Dans ce cas là, le choix de R et τ n'a pas d'importance pourvu qu'on ait $\tau = b_t R^{d/q}$. On a dans tout les cas

$$\mathbb{P}(I_t \geq b_t^p) \sim \exp(-b_t).$$

(3) Cas sur-critique : $d/q - 2 > 0 \Leftrightarrow p(d-2) > d$. On a besoin ici de choisir R minimum, soit $R \sim 1$. Ainsi une bonne stratégie semble de localiser la marche durant un temps de l'ordre de b_t dans une boule de rayon 1. On a dans ce cas là

$$\mathbb{P}(I_t \geq b_t^p) \sim \exp(-b_t).$$

On voit donc apparaitre trois cas distincts qui nous donnent des indications sur les vitesses de déviations dans chacun de trois cas. Ces vitesses de déviations ont parfois été prouvées avant d'obtenir les constantes exactes de déviations. Asselah et Castell ont par exemple prouvé dans [**AC07b**] les échelles de grandes déviations dans le cas $p = 2$ et $d \geq 5$ (dimensions sur-critiques) puis Asselah donne dans [**Ass08**] les échelles de déviations pour $p = 2$ et $d = 3$. On peut noter que Fleischmann, Mörters et Wachtel [**FMW08**] ont obtenu des inégalités de concentrations à des échelles de déviations modérées mais sans obtenir les bonnes vitesses (à noter que les auteurs traitent aussi les cas $p = 2$,$d = 4$ et $p = 3$, $d \geq 4$). Les travaux précédemment cités portaient sur des modèles de marches aléatoires en paysages aléatoires dont nous avons parlé en Section 2.3 du chapitre précédent. Leur but en obtenant ces résultats de vitesses de déviations étaient d'obtenir des résultats de grandes déviations pour ce type de marches aléatoires. Ces résultats s'accompagnent aussi d'informations qui précisent les heuristiques données ci-dessus. En effet, dans [**AC07b**] Asselah et Castell montrent que pour $p = 2$ et $d \geq 5$ c'est à dire dans des dimensions sur-critiques,

Proposition 1.1. *$\forall \epsilon > 0$ et $\forall y > 1 + 2\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} G(x)^2$,*

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \log \mathbb{P}\left(\sum_{x/l_t(x)\leq t^{1/2-\epsilon}} l_t^2(x) \geq ty\right) = -\infty.$$

Ce résultat prouve que les sites où la marche passe un temps d'un ordre inférieur à $\sqrt{t}$ ne participent pas à la déviation. Cela renforce donc l'heuristique en nous incitant à penser que la marche passe bien un temps de l'ordre $\sqrt{t}$ sur un nombre fini de sites, ce qui fait grossir I_t jusqu'à un ordre de t. La marche est ensuite laissée libre. On notera que ce résultat a été étendu par Asselah au cas sur-critique pour $d \geq 3$ dans [**Ass10**].

Dans le cas sous-critique, Asselah [**Ass10**] montre que

PROPOSITION 1.2. *Pour $d \geq 3$, $\forall \xi > 1$,*

$$\limsup_{A\to+\infty} \limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t^{1-2/d}} \log \mathbb{P}\left(\sum_{x/l_t(x)\geq A} l_t^p(x) \geq \xi t \right) = -\infty.$$

Ce résultat montre que les sites trop souvent visités ne participent pas à la déviation. Ce résultat conforte donc l'heuristique qui nous indiquait que la marche passait un temps de l'ordre de b_t^q/t^{q-1} sur les sites visités.

Dans la suite de ce chapitre, nous allons voir tout d'abord que les échelles données par les heuristiques sont les bonnes, et que pas moins de six approches différentes ont été introduites dans les différents articles sur le sujet pour prouver les principes de grandes déviations.

2. Résultats actuels

Nous présentons dans cette section les résultats de grandes déviations connus à ce jour -dans la limite de nos connaissances- sur les intersections de marches aléatoires. Nous distinguerons trois type de déviations, à savoir les très grandes déviations, les grandes déviations et les déviations modérées. On parlera de très grandes déviations lorsqu'on est à des échelles très grandes devant la moyenne, c'est à dire lorsqu'on estime $\mathbb{P}\left(I_t \geq a_t\right)$ pour $a_t \gg \mathbb{E}[I_t]$. Les grandes déviations concernent l'échelle de la moyenne, c'est à dire lorsque $a_t \geq \mathbb{E}[I_t]$, et les déviations modérées les échelles en dessous de la moyenne, à savoir lorsqu'on regarde $\mathbb{P}\left(I_t - \mathbb{E}[I_t] \geq a_t\right)$ pour $\sqrt{Var(I_t)}a_t \ll \mathbb{E}[I_t]$. On renvoie pour cette partie au livre de Chen [**Che10**] et à l'article de König [**Kö10**] qui fait le point des résultats connus sur le sujet.

Commençons par prendre quelques notations. On notera $\|\cdot\|_p$ la norme p classique des fonctions définies de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ et $N_p(\cdot)$ la norme p des fonctions définies de $\mathbb{Z}^d$ dans $\mathbb{R}$. Certains résultats énoncés ont été prouvé dans le cas du temps discret, d'autres dans le cas du temps continu, comme précédemment on les énonce tous dans le cas du temps continu.

2.1. Cas des marches à variance finie.

2.1.1. *Cas sous-critique.* Il s'agit du cas le plus avancé. On commence par une petite proposition liant les diverses écritures des constantes de déviations. Posons

$$\chi_{d,p} = \inf\left\{ \frac{1}{2}\|\nabla g\|_2^2, \|g\|_2 = \|g\|_{2p} = 1 \right\}.$$

et $\kappa_{d,p}$ la meilleure constante dans une inégalité de Gagliardo-Nirenberg :

$$\kappa_{d,p} = \sup\left\{ \frac{\|g\|_{2p}}{\|\nabla g\|_2^{d/(2q)} \|g\|_2^{1-d/(2q)}}, g \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d) \right\}.$$

PROPOSITION 2.1.

$$\chi_{d,p} = \frac{1}{2}\kappa_{d,p}^{-4q/d}.$$

Démonstration. On peut remarquer que l'expression $\frac{\|g\|_{2p}}{\|\nabla g\|_2^{d/(2q)}\|g\|_2^{1-d/(2q)}}$ est invariante par la transformation $g_\gamma(\cdot) = \gamma^{d/(2p)} g(\gamma\cdot)$. Ainsi

$$\kappa_{d,p} = \sup\left\{ \frac{\|g\|_{2p}}{\|\nabla g\|_2^{d/(2q)}}, g \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d), \|g\|_2 = 1 \right\}.$$

A nouveau l'expression $\frac{\|g\|_{2p}}{\|\nabla g\|_2^{d/(2q)}}$ est invariante par la transformation $g_\gamma(\cdot) = \gamma^{d/2} g(\gamma\cdot)$. On peut donc ajouter la condition $\|g\|_{2p} = 1$ et on a le résultat voulu. □

Chen et Li [**CL04**] obtiennent d'abord un résultat de très grandes déviations pour toute valeur de $p > 1$ dans le cas de la dimension 1 pour des marches symétriques, apériodiques à variance finie. Puis Chen [**Che04**] obtient un résultat du même type pour les dimensions supérieures ou égales à 2 mais pour les intersections mutuelles de marches :

Théorème 2.2 (Chen 2004). *Soient $X_t^{(1)}, \cdots, X_t^{(p)}$ p marches aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de $\mathbb{Z}^d$ pour $d \geq 2$, symétriques et de matrice de covariance Γ. Supposons $p(d-2) < d$, pour toute suite $(\beta_n)_n$ telle que $1 \ll \beta_n \ll n$ et pour tout $\lambda > 0$ on a :*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\beta_t} \log \mathbb{P}\left(Q_t \geq \lambda t^{p-d(p-1)/2} \beta_t^{d(p-1)/2} \right) = -p(\det\Gamma)^{1/d} \lambda^{2/(d(p-1))} \chi_{d,p}$$

Plus récemment, Becker et König [**BK11**] ont obtenu un principe de grandes déviations dans le cas sous-critique pour une marche simple mais avec deux restrictions. D'une part ils n'obtiennent le résultat que pour $p(d-2/p) < d$, d'autre part le principe de grandes déviations n'est valable que sur une échelle de déviations restreinte, distante de la moyenne de I_t à un facteur polynomial prés. Finalement nous avons obtenu dans [**Lau10a**] le résultat suivant qui englobe les précédents et dont la démonstration est donnée dans le Chapitre 5.

Théorème 2.3 (L. 2010). *Supposons $p(d-2) < d$ et*

(1) *en dimension $d = 1$, $1 \ll \beta_t^2 \ll t$*
(2) *en dimension $d = 2$, $1 \ll \beta_t^2 \ll \frac{t}{\log t}$*
(3) *en dimension $d \geq 3$, $1 \ll \beta_t^d \ll t$*

on a quelque soit $\lambda > 0$,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\beta_t^2}{t} \log \mathbb{P}\left(I_t \geq \lambda t^p \beta_t^{-d(p-1)} \right) = -\lambda^{2/(d(p-1))} \chi_{d,p}. \tag{5}$$

Remarque 2.4. *Compte tenu des échelles de I_t données en Section 2.4 du chapitre précédent, on peut voir qu'on a bien un résultat de très grandes déviations puisque on a dans les trois cas, $t^p \beta_t^{-d(p-1)} \gg \mathbb{E}[I_t]$.*

Nous verrons plus tard que nous avons généralisé la borne supérieure de ce résultat aux marches aléatoires α-stables.

En ce qui concerne les résultats de déviations modérées, les résultats sont parcellaires. A l'heure actuelle, seul le cas de la double intersection ($p = 2$) en dimension

2 et 3 est connu. Bass, Chen et Rosen [**BCR06**] ont dans un premier temps prouvé le résultat suivant :

Théorème 2.5 (Bass, Chen et Rosen 2006). *Soit $(X_t, t \geq 0)$ une marche aléatoire de $\mathbb{Z}^2$, symétrique, apériodique et de matrice de covariance Γ. Quelle que soit $(b_t)_t$ tel que $1 \ll b_t \ll t$, $\forall \lambda > 0$,*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{b_t} \log \mathbb{P}\left(I_t - \mathbb{E}[I_t] \geq \lambda t b_t\right) = -\lambda \sqrt{\det \Gamma}\ \kappa(2,2)^{-4}. \tag{6}$$

On peut noter que nous sommes bien en présence d'un résultat de déviations modérées, puisque comme nous l'avons vu dans la section 2.4 du chapitre précédent, en dimension 2, $I_t \sim t \log t$. Les auteurs réussissent donc bien à passer en dessous de la moyenne. Plus récemment, Chen [**Che10**] a prouvé le même type de résultat dans le cas de la dimension 3. Il est à noter que le cas de la dimension 3 est plus compliqué que celui de la dimension 2 car il y a deux échelles de déviations à l'intérieur des déviations modérées. Chen regarde des quantités de la forme $I_t - \mathbb{E}[I_t] \geq c_t$ avec dans le cas présent $\mathbb{E}[I_t] \sim t$. L'auteur montre qu'il y a deux échelles de déviations, la première pour les suites $(c_t)_t$ telles que $\sqrt{t \log t} \ll c_t \ll \sqrt{t}\,(\log t)^{3/4}$, et une deuxième échelle pour $\sqrt{t}\,(\log t)^{3/4} \ll c_t \ll t^2$. Les résultats obtenus sont les suivants :

Théorème 2.6 (Chen 2010). *Soit $(X_t, t \geq 0)$ une marche aléatoire de $\mathbb{Z}^3$, symétrique, apériodique et de matrice de covariance Γ. Quelle que soit $(b_t)_t$ tel que $1 \ll b_t \ll \sqrt{\log t}$, $\forall \lambda > 0$,*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{b_t} \log \mathbb{P}\left(I_t - \mathbb{E}[I_t] \geq \lambda \sqrt{t b_t \log t}\right) = -\lambda^2 \pi^2 \det(\Gamma) \tag{7}$$

Théorème 2.7 (Chen 2010). *Soit $(X_t, t \geq 0)$ une marche aléatoire de $\mathbb{Z}^3$, symétrique, apériodique et de variance finie. Quelle que soit $(b_t)_t$ tel que $\sqrt{\log t} \ll b_t \ll t$, quelque soit $L > 0$ il existe $\lambda > 0$ tel que*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{b_t} \log \mathbb{P}\left(I_t - \mathbb{E}[I_t] \geq \lambda \sqrt{t b_t^3}\right) \leq -L \tag{8}$$

Remarque 2.8. *Le théorème 2.7 ne nous donne qu'une indication sur les échelles de déviations. On peut cependant remarquer que le résultat est connu (voir théorème 2.3) pour les grandes échelles ($t^{1/3} \ll b_t \ll t$). Le résultat de déviations est donc entièrement connu sauf pour les échelles juste en dessous de la moyenne, à savoir $\sqrt{\log t} \ll b_t \ll t^{1/3}$.*

2.1.2. *Cas sur-critique.* Khanin, Mazel, Shlosman et Sinai ont été les premiers à s'intéresser aux déviations dans le cas sur-critique. Ils obtiennent dans [**KMSS94**], les échelles de grandes déviations pour les intersections mutuelles de deux marches aléatoires indépendantes en dimension $d \geq 5$ (ce qui correspond bien au cas sur-critique). Par la suite, Asselah et Castell dans [**AC07b**] obtiennent les échelles des grandes déviations pour les auto-intersections de marches aléatoires pour $d \geq 5$ et pour tout p vérifiant $p > \frac{d}{d-2}$ (cas sur-critique). A la suite de ce résultat, Chen et Mörters [**CM09**] se sont intéressés aux intersection mutuelles de p marches indépendantes $X^{(1)}, \cdots, X^{(p)}$, mais directement pour le temps infini, c'est à dire qu'ils se sont intéressés à la quantité

$$Q_\infty = \int_0^{+\infty} dt_1 \cdots \int_0^{+\infty} dt_p \; \mathbb{1}\left\{X^{(1)}_{t_1} = \cdots = X^{(p)}_{t_p}\right\}.$$

On notera comme nous l'avons souligné en Section 3 du chapitre précédent, que cette quantité est finie presque sûrement dans le cas sur-critique. Posons

$$\Upsilon(p) = \sup\left\{< g, Gg >, N_{(2p)'}(g) = 1\right\} \tag{9}$$

où $\forall r \geq 1$, $N_r^r(g) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} g(x)^r$, $Gg(x) = \sum\limits_{y\in\mathbb{Z}^d} G(x-y)g(y)$ et $< \cdot, \cdot >$ est le produit scalaire sur $l^2(\mathbb{Z}^d)$. Les auteurs prouvent :

THÉORÈME 2.9 (Chen et Mörters 2009). *Supposons $p(d-2) > d$. Soient $X^{(1)}_{t_1}, \cdots, X^{(p)}_{t_p}$ p marches indépendantes et identiquement distribuées, apériodiques, symétriques et à variance finie. On a alors*

$$\lim_{a\to+\infty} \frac{1}{a^{1/p}} \log \mathbb{P}\left(Q_\infty \geq a\right) = -\frac{p}{\Upsilon(p)}.$$

A la suite de cet article, nous nous sommes intéressés à appliquer la méthode utilisée par Castell dans le cas critique (Théorème 2.12) au cas sur-critique. Nous avons obtenu dans [**Lau10b**] le théorème 2.19 qui donne un principe de très grandes déviations pour les auto-intersections de marches α-stables dans les cas critique et sur-critique. On obtient comme cas particulier de ce résultat le théorème suivant :

THÉORÈME 2.10 (L.2010). *Supposons $p(d-2) > d$. Soit $(X_t, t \geq 0)$ la marche simple sur $\mathbb{Z}^d$. On a alors pour toute suite $1 \ll \beta_t^d \ll t$ et pour tout $\lambda > 0$,*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\beta_t^{d/q}}{t} \log \mathbb{P}\left(I_t \geq \lambda t^p \beta_t^{-d(p-1)}\right) = -\frac{\lambda^{1/p}}{\Upsilon(p)}.$$

On notera qu'en utilisant l'inégalité (2) du Chapitre 1, nous obtenons comme corollaire de ce principe de grandes déviations, la borne supérieure du Théorème 2.9.

On vient donc de voir des résultats du type très grandes déviations. Il n'y a pas à ce jour de résultats de type déviations modérées dans le cas sur-critique. En revanche, Asselah [**Ass09**] a obtenu un résultat de type grandes déviations dans le cas sur-critique pour la double intersection ($p = 2$) ce qui implique $d \geq 5$. On a donc :

THÉORÈME 2.11 (Asselah 2009). *Supposons $p = 2$ et $d \geq 5$. Soit $(X_t, t \geq 0)$ la marche simple sur $\mathbb{Z}^d$. Pour tout $\lambda > 0$,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \log \mathbb{P}\left(I_n - \mathbb{E}[I_n] \geq \lambda n\right) = -\frac{\sqrt{\lambda}}{\Upsilon(p)}.$$

2.1.3. *Cas critique.* Le cas $p(d-2) = d$ est critique à plusieurs titres. Tout d'abord, on a vu dans la Section 1 que nous n'avons pas d'heuristique précise pour que la marche réalise les grandes déviations. De plus, la constante de Gagliardo-Nirenberg devient dans ce cas, la meilleure constante dans une inégalité de Sobolev :

$$\kappa(d,p) = \sup\left\{ \frac{\|g\|_{2p}}{\|\nabla g\|_2^{d/(2q)}}, g \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d) \right\}.$$

Dans le cas critique, cette constante coïncide avec la version discrète de l'inégalité de Sobolev :

$$C(d,p) = \sup\left\{ \frac{N_{2p}(g)}{N_2^{d/(2q)}(\nabla g)} \right\}.$$

C'est d'ailleurs cette dernière qui apparaît dans le résultat de très grandes déviations prouvé par Castell [**Cas10**] :

THÉORÈME 2.12 (Castell 2010). *Supposons $p(d-2) = d (\Leftrightarrow d/q = 2)$. Soit $(X_t, t \geq 0)$ une marche aléatoire simple. Quelle que soit la suite $(\beta_t, t \geq 0)$ telle que $1 \ll \beta_t^d \ll t$, $\forall \lambda > 0$,*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\beta_t^2}{t} \log \mathbb{P}\left(I_t \geq \lambda t^p \beta_t^{-d(p-1)} \right) = -\frac{\lambda^{1/p}}{C(d,p)^2}. \tag{10}$$

REMARQUE 2.13. *On peut voir que comme dans le cas sur-critique, la fonction de taux n'est pas convexe. Dans le cas sous-critique elle ne l'est pas nécessairement. Par contre, la fonction de taux associé à $\|l_t\|_p$ l'est toujours.*

2.2. Cas des marches α-stables. On peut refaire l'heuristique de la Section 1 dans le cas des marches α-stables. Le seul changement est dans la probabilité que la marche soit localisée dans une boule de rayon R durant un temps τ qui est désormais de l'ordre de $\exp(-\tau/R^\alpha)$. Toujours en optimisant cette dernière en R, les trois cas deviennent alors :

(1) Cas sous-critique : $d/q - \alpha < 0 \Leftrightarrow p(d-\alpha) < d$.
On a alors
$$\mathbb{P}(I_t \geq b_t^p) \sim \exp\left(-t^{(d-\alpha q)/d} b_t^{\alpha q/d} \right).$$

(2) Cas critique : $d/q - \alpha = 0 \Leftrightarrow p(d-\alpha) = d$.
On a alors
$$\mathbb{P}(I_t \geq b_t^p) \sim \exp(-b_t).$$

(3) Cas sur-critique : $d/q - \alpha > 0 \Leftrightarrow p(d-\alpha) > d$.
On a alors
$$\mathbb{P}(I_t \geq b_t^p) \sim \exp(-b_t).$$

2.2.1. *Cas sous-critique.* A la suite de leurs résultats dans le cas des marches à variance finie [**CL04**], Chen et Li en collaboration avec Rosen [**CLR05**] ont généralisé leurs résultats de grandes déviations en dimension 1 dans le cas plus général de marches α-stables. Plus précisément les auteurs se placent dans le cas où $\alpha > 1$, ce qui revient dans le cas de la dimension 1 à considérer une marche récurrente. La condition $p(d-\alpha) < d$ est alors automatiquement vérifiée. Notons,

$$\chi_{\alpha,d,p} = \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^d} |\omega|^\alpha |\mathcal{F}(g)(\omega)|^2 d\omega, \|g\|_{2p} = \|g\|_2 = 1\right\},$$

où $\mathcal{F}(g)$ est la transformée de Fourier de g, c'est à dire

$$\mathcal{F}(g)(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \exp\left(-2i\pi < x, \omega >\right) dx.$$

Ils ont donc le résultat de très grandes déviations suivant :

THÉORÈME 2.14 (Chen, Li et Rosen 2005). *Soit $(X_t, t \geq 0)$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$, symétrique et dans le domaine d'attraction d'un processus α-stable avec $\alpha > 1$. Supposons $p \geq 1$, pour tout $(\beta_t)_t$ tel que $1 \ll \beta_t^\alpha \ll t$ et pour tout $\lambda > 0$, on a :*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\beta_t^\alpha}{t} \log \mathbb{P}\left(I_t \geq \lambda t^p \beta_t^{1-p}\right) = -\frac{1}{2}\lambda^{\alpha/(p-1)}\chi_{\alpha,1,p}.$$

A la suite de son article [**Che04**] sur les intersections mutuelles des marches à variance finie, Chen en collaboration avec Rosen [**CR05**] publie un résultat de très grandes déviations pour le temps local d'intersections mutuelles de p marches α-stables indépendantes.

THÉORÈME 2.15 (Chen et Rosen 2005). *Soient $X^{(1)}, \cdots, X^{(p)}$ p marches aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de $\mathbb{Z}^d$, symétriques et dans le domaine d'attraction d'un processus α-stable. Supposons $p(d-\alpha) < d$, pour tout $(\beta_t)_t$ tel que $1 \ll \beta_t \ll t$ et pour tout $\lambda > 0$, on a :*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\beta_t} \log \mathbb{P}\left(Q_t \geq \lambda t^{p-d(p-1)/\alpha} \beta_t^{d(p-1)/\alpha}\right) = -\frac{p}{2}\lambda^{\alpha/(d(p-1))}\chi_{\alpha,d,p}.$$

Nous présentons maintenant un travail en cours. Nous travaillons à obtenir un résultat de très grandes déviations pour le temps local d'auto-intersections valable pour le cas sous-critique en entier mais pour une catégorie de marches aléatoires α-stable seulement. Pour des raisons que nous exposerons ultérieurement, nous nous sommes placés sous l'hypothèse suivante. On pose μ la loi de l'incrément de la marche$(X_t, t \geq 0)$.

HYPOTHÈSE 2.16.

$$\exists C_1, C_2 > 0 \text{ tels que } \forall x, y \in \mathbb{Z}^d,\ \frac{C_1}{|y-x|^{d+\alpha}} \leq \mu(y-x) \leq \frac{C_2}{|y-x|^{d+\alpha}}.$$

On notera que cette hypothèse exclut le cas de la marche simple. Néanmoins, cette hypothèse ne servant qu'à obtenir des estimées de la fonction de Green, on peut s'en passer pour la marche simple car on peut obtenir ces estimées sans hypothèse supplémentaire. Le résultat espéré mais non encore complètement prouvé est le suivant. Posons

$$\rho = \left(\frac{\alpha q}{\alpha q - d}\right)\left(\frac{\alpha q - d}{d}\right)^{d/\alpha q} \inf\left\{ \|g\|_2^{2(1-d/\alpha q)} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\omega|^\alpha |\mathcal{F}(g)(\omega)|^2 d\omega\right)^{d/\alpha q}, \|g\|_{2p} = 1\right\}.$$

THÉORÈME 2.17. *Soit* $(X_t, t \geq 0)$ *une marche aléatoire apériodique et symétrique, sous l'hypothèse 2.16, pour* $p(d-\alpha) < d$ *et*

(1) *pour* $d < \alpha$, $1 \ll \beta_t^\alpha \ll t$

(2) *pour* $d = \alpha$, $1 \ll \beta_t^d \ll \frac{t}{\log t}$

(3) *pour* $d > \alpha$, $1 \ll \beta_t^d \ll t$

on a quelque soit $\lambda > 0$,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\beta_t^\alpha}{t} \log E\left[\exp\left(\lambda \beta_t^{d/q-\alpha} N_p(l_t)\right)\right] = \left(\frac{\lambda}{\rho}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha - d/q}} \tag{11}$$

et

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\beta_t^\alpha}{t} \log \mathbb{P}\left(I_t \geq \lambda t^p \beta_t^{-d(p-1)}\right) = -\lambda^{\alpha/(d(p-1))} \chi_{\alpha,d,p}. \tag{12}$$

Compte tenu des estimées du temps local d'auto-intersections des marches α-stables données dans le Chapitre 1 par 4, 2.4.2 et 2.4.2, on peut voir que nous sommes bien en présence d'un énoncé de très grandes déviations puisque les trois conditions (1), (2) et (3) du Théorème 2.17 sont bien toutes équivalentes à $t^p \beta_t^{-d(p-1)} \gg \mathbb{E}[I_t]$. Jusqu'à présent, nous avons prouvé le résultat suivant dont la démonstration est donnée au Chapitre 6. On pose

$$\rho(a, R) = \left\{ a\,\|g\|_{2,R}^2 + \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} |\mathcal{F}_R(g)\,(z)|^2 \left|\frac{z}{R}\right|^\alpha, \|g\|_{2p,R} = 1\right\} \tag{13}$$

où pour une fonction g R-périodique,

$$\forall z \in \mathbb{Z}^d, \mathcal{F}_R(g)(z) = \frac{1}{R^d}\int_{[0,R]^d} g(x) \exp\left(-2i\pi < x, \frac{z}{R} >\right),$$

et on a :

THÉORÈME 2.18. *Soit* $(X_t, t \geq 0)$ *une marche aléatoire apériodique et symétrique satisfaisant l'hypothèse 2.16. Supposons que* $\alpha > d/q$ *et que*

– *pour* $d < \alpha$, $1 \ll \beta_t^\alpha \ll t$,

– *pour* $d = \alpha$, $1 \ll \beta_t^d \ll \frac{t}{\log(t)}$,

– *pour* $d > \alpha$, $1 \ll \beta_t^d \ll t$,

alors on a $\forall \theta > 0$

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\beta_t^\alpha}{t} \log E\left[\exp\left(\theta \beta_t^{d/q-\alpha} N_p(l_t)\right)\right] \leq \inf\left\{a, \liminf_{R\to+\infty} \rho(a,R) > \theta\right\}.$$

On peut dès à présent remarqué que nous n'avons pas prouvé la borne inférieure des moments exponentiels. Néanmoins celle-ci devrait être obtenue sans trop de difficultés en suivant le cheminement proposé par Chen et Li (Section 4 dans [**CL04**]). Pour ce qui est de la borne supérieure, si on arrive à montrer que

$$\liminf_{R\to+\infty} \rho(a,R) \geq \rho(a) \tag{14}$$

où $\rho(a) = \rho(a) = \inf \left\{ a \left\|g\right\|_2^2 + \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\omega|^\alpha |\mathcal{F}g(\omega)|^2, \left\|g\right\|_{2p} = 1 \right\}$ alors la démonstration est finie puisqu'il suffit alors de remarquer que

$$\rho(a) = a^{(d-p(d-\alpha))/\alpha p}, \forall a > 0.$$

Il reste donc à montrer l'inégalité (14), c'est à dire le passage de la version périodique de la constante à sa version finale.

2.2.2. *Cas critique et sur-critique.* Le seul résultat connu dans le cas critique et sur-critique est celui que nous avons obtenu dans [**Lau10b**]. Comme dans le cas sous-critique nous nous sommes placés sous l'hypothèse 2.16. Posons

$$\rho(p) = \sup \left\{ < g, Gg >, N_{(2p)'}(g) = 1 \right\}.$$

On remarquera que dans les cas critique et sur-critique, on a $p(d-\alpha) \geq d$. Ainsi $d > \alpha$, la marche aléatoire est donc transitoire et la fonction de Green G est donc bien définie.

Théorème 2.19 (L.2010). *Soit $(X_t, t \geq 0)$ une marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}^d$ vérifiant l'hypothèse 2.16. Supposons $p(d-\alpha) \geq d$, alors pour toute suite $(\beta_t)_{t\geq 0}$ telle que $1 \ll \beta_t^d \ll t$, pour tout $\lambda > 0$,*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\beta_t^{d/q}}{t} \log \mathbb{P}\left(I_t \geq \lambda t^p \beta_t^{-d(p-1)} \right) = -\frac{\lambda^{1/p}}{\rho(p)}.$$

On notera que la condition $\beta_t^d \ll t$ est équivalente à $t^p \beta_t^{-d(p-1)} \gg t$. Or dans le cas présent $p(d-\alpha) \geq d$, donc nécessairement $d > \alpha$. La marche est donc transitoire et $\mathbb{E}[I_t] \sim t$. Nous sommes donc bien en présence d'un résultat de très grandes déviations.

3. Méthodes utilisées

Comme nous le verrons dans la Section 2 du chapitre suivant, les difficultés principales pour obtenir les différents principes de grandes déviations se concentrent sur la borne supérieure. C'est pourquoi nous présentons dans cette Section les différentes méthodes introduites par les auteurs pour prouver les bornes supérieures de ces principes.

3.1. Décomposition triangulaire et approximation du temps local. Cette méthode a été utilisée abondamment et avec succès d'une part par Chen et ses différents co-auteurs, d'autre part par Asselah et Castell [**AC07b**] et par Asselah [**Ass09**]. On présente dans cette section cette décomposition triangulaire et ensuite les autres ingrédients des preuves proposées par Chen et ses co-auteurs dans le cas

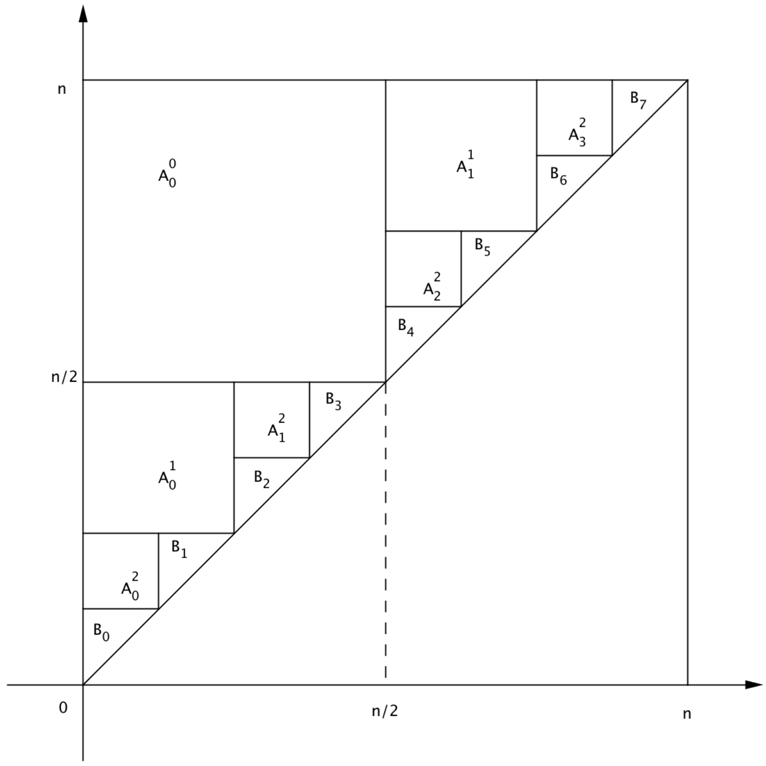


FIGURE 1. Décomposition triangulaire

sous-critique. Plaçons nous dans le cas du temps discret. Le temps local de double intersections peut se réécrire sous la forme

$$I_n = n + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{1}\{X_i = X_j\}.$$

On est donc ramené à calculer des déviations de la quantité

$$\tilde{Q}_n = \sum_{0 \leq i < j \leq n} \mathbb{1}\{X_i = X_j\}.$$

On regarde donc les intersections de la marche non plus sur le carré $[0, n] \times [0, n]$ mais sur le triangle $\{(i, j), 0 \leq i < j \leq n\}$. Les auteurs utilisent l'astucieuse décomposition géométrique introduite par Varadhan dans son appendice à l'article de Symanzik [**Var69**](Cf Remarque 3.1). Les auteurs appliquent cette méthode dans le cas des marches aléatoires. Cette méthode permet de décomposer $\tilde{Q}_n$ en différentes somme de variables aléatoires ayant des propriétés d'indépendance. Ce découpage est illustré par la figure 1. Le carré $[0, n] \times [0, n]$ est le domaine de temps sur lequel on regarde les intersections $\{X_i = X_j\}$ de la marche. On a vu que l'on se ramenait au domaine $\{1 \leq i < j \leq n\}$, c'est pourquoi seul le domaine se trouvant au dessus de la diagonale nous intéresse ici. Il est clair au vu de la découpe temporelle que à j fixé, les mesures des intersections sur les $(A_k^j)_k$ sont indépendantes et identiquement distribuées. De plus, pour un domaine d'intersection A_k^j, ces intersections se font sur des intervalles de temps disjoints en abscisse et en ordonnée, cela revient donc à regarder les intersections mutuelles de deux marches indépendantes. On peut aussi facilement voir que les mesures des intersections sur les $(B_j)_j$ sont indépendantes et identiquement distribuées. Par contre, sur ces domaines d'intersections, les intervalles de temps sont les mêmes en abscisses et en ordonnées, il s'agit donc d'auto-intersections. On peut formuler ces remarques de manière plus précise en prenant les notations suivantes. Pour $N \geq 1$ un niveau d'approximation fixé, on considère les variables aléatoires

$$\eta_j = \sum_{(j-1)n2^{-N} < i < i' \leq jn2^{-N}} \mathbb{1}\{X_i = X_{i'}\}$$

et

$$\xi_{j,k} = \sum_{\substack{(2k-2)n2^{-j} < i \leq (2k-1)n2^{-j} \\ (2k-1)n2^{-j} < i' \leq 2kn2^{-j}}} \mathbb{1}\{X_i = X_{i'}\}.$$

Les variables aléatoires $\left(\eta_j, j \in \left\{1, \cdots, 2^N\right\}\right)$ correspondent aux auto-intersections de la marche sur les B_j, tandis que les variables $\left(\xi_{j,k}, j \in \{1, \cdots, N\}, k \in \{1, \cdots, 2^{j-1}\}\right)$ correspondent aux intersections mutuelles de la marche sur les A_k^j. Compte tenu de ces notations, on a

$$\tilde{Q}_n = \sum_{j=1}^{2^N} \eta_j + \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{2^{j-1}} \xi_{j,k}. \tag{15}$$

Bien sûr ces variables aléatoires ne sont pas indépendantes dans leur ensemble, mais comme on l'a vu précédemment, les $(\eta_j)_j$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, et à j fixé, les $(\xi_{j,k})_k$ sont elles aussi indépendantes et identiquement distribuées. Par ailleurs, dans le cas sous-critique, les intersections mutuelles données par les $\xi_{j,k}$ sont prépondérantes devant les auto-intersections données par les η_j lorsque N est grand. Ce sont les intersections mutuelles qui contribuent à faire grossir le temps local d'auto-intersection. L'indépendance des variables et la contribution différente qu'apporte les $(\eta_j)_j$ par rapport aux $(\xi_{j,k})_{j,k}$ aux intersections de la marche sont les deux propriétés majeures de cette décomposition.

Une deuxième idée est d'utiliser les principes d'invariance pour les marches aléatoires dans le domaine d'attraction d'un processus α-stable ou d'un mouvement Brownien, pour déplacer le problème aux grandes déviations pour le temps local d'auto-intersections du processus limite. Il faut (en dehors du cas plus simple de la dimension 1) pour appliquer ces principes d'invariance, renormaliser correctement le temps local d'auto-intersections. C'est fait par les auteurs de la manière suivante. On considère la régularisation du temps local

$$l(n, x, \epsilon) = a_n \sum_{i=1}^{n} h_\epsilon\left(\frac{X_i - x}{a_n}\right),$$

où h_ϵ est une approximation de l'identité et $(a_n)_n$ une suite bien choisie. Cette renormalisation permet d'appliquer au temps local d'auto-intersections le principe d'invariance pour deux raisons. D'une part elle permet d'être à l'échelle du principe d'invariance, et d'autre part elle permet de rendre l'application

$$f \mapsto \varphi_n(f) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^t h_\epsilon \left(f(s) - \frac{\lfloor a_n x \rfloor}{a_n} \right) ds \right)^p dx$$

continue sur l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$. On est donc ramener à la question des auto-intersections du processus limite à condition que l'approximation soit bonne à l'échelle des grandes déviations. Prouver que que cette approximation est bonne à l'échelle des très grandes déviations utilise des outils standards d'analyse. En revanche, prouver que l'approximation est assez bonne pour descendre aux échelles de déviations modérées nécessite d'être plus astucieux. Grâce à la décomposition triangulaire présentée ci-avant, ils peuvent se ramener à ne regarder que la version renormalisée des intersections mutuelles puisque les auto-intersections sont négligeables dans le cas sous-critique. Cela permet à Chen et ses co-auteurs [**BCR06**], [**Che10**] d'obtenir des résultats très puissants de déviations modérées, mais uniquement dans le $p = 2$ puisque la décomposition triangulaire est propre à ce cas.

Il reste donc à prouver les résultats de grandes déviations pour les processus limites. Nous ne présentons pas en détails ces preuves, on peut les trouver dans [**Che04**] mais elles sont loin d'être aisées. En effet, les difficultés dues aux mauvaises propriétés de continuité de l'application $f \mapsto \|f\|_p$ que nous expliquons en détails dans la Section 2 sont toujours présentes. Ces preuves utilisent un certain nombre d'outils puissants d'analyse fonctionnelle, tels qu'un critère de compacité du à de Acosta [**dA85**], le théorème de Arzelá-Ascoli ou le théorème de Hahn-Banach.

REMARQUE 3.1. *L'idée de la décomposition triangulaire a été introduite par Varadhan dans* [**Var69**]. *A l'époque il l'avait utilisée pour prouver qu'à condition de correctement le renormaliser, le temps local d'intersection du mouvement Brownien en dimension* 2 *existait. Cette idée a ensuite été reprise par Westwater pour des problèmes de polymères et surtout par Le Gall pour des problèmes d'intersections de mouvements Browniens* [**LG85a**] *et pour des questions liées au nombre de points visités par une marche aléatoire* [**LG86a**].

3.2. Découpe suivant les niveaux de contributions. L'idée développée par Asselah dans [**Ass09**] pour obtenir le théorème 2.11 prend sa source dans un article co-écrit avec Castell [**AC07b**]. Il s'agit pour calculer des grandes déviations du temps local d'auto-intersections, de comprendre quels sont les sites qui contribuent à la déviation, et quels sont ceux qui n'y contribuent pas. Donc, quel temps doit passer la marche sur tel ou tel site pour qu'il participe ou non à la déviation. C'est ce qu'on entend par niveau de contribution. Dans [**AC07b**], Asselah et Castell prouvent que dans le cas des dimensions sur-critiques $d \geq 5$, les sites qui contribuent à faire grossir le temps local d'auto-intersections sont ceux où la marche passe un temps de l'ordre de $\sqrt{n}$ (Proposition 1.1). Asselah a par la suite raffiné cet argument en prouvant le résultat suivant :

PROPOSITION 3.2 (Asselah 2009). *Supposons $d \geq 5$. Il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\alpha_\epsilon > 0$ et Λ_ϵ un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^d$, tel que pour tout*

$\alpha > \alpha_\epsilon$ et pour tout $\Lambda \supset \Lambda_\epsilon$ fini, alors pour n assez grand et pour tout $\xi > 0$,

$$\frac{1}{2} P\left(I_n - E[I_n] \geq n\xi\right) \leq \exp\left(\beta\epsilon\sqrt{n}\right) P\left(\| \, 1\!\!I_\Lambda l_{\lfloor \alpha\sqrt{n} \rfloor} \|_2^2 \geq n\xi(1-\epsilon), X_{\lfloor \alpha\sqrt{n} \rfloor} = 0\right).$$

Ce résultat permet de voir que seul un nombre fini de sites contribuent à la déviation, et qu'ils contribuent à hauteur de $\sqrt{n}$. C'est l'ingrédient principal de la preuve de l'auteur. Une fois cette proposition montrée, l'auteur est donc grosso modo ramené à calculer la limite suivante :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\log \mathbb{P}\left(\| \, 1\!\!I_\Lambda l_n \|_2^2 \geq n\xi, X_n = 0\right)}{n}.$$

Cette limite est calculée en deux temps. Dans un premier temps, l'auteur montre l'existence de cette limite par un argument de sous-additivité, puis dans un deuxième temps il identifie sa constante de déviation avec celle de Chen et Mörters ($\Upsilon(2)$ dans Théorème 2.9). L'argument de sous-additivité provient d'une bonne compréhension de la stratégie adoptée par la marche pour réaliser les grandes déviations. Il peut être expliqué comme suit. L'événement considéré est

$$\mathcal{A}_n = \left\{ \| \, 1\!\!I_\Lambda l_n \|_2^2 \geq n\xi, X_n = 0 \right\}.$$

Soit p, q, r des entiers naturels tels que $n = pq + r$. Si on oublie le reste de la division euclidienne r, pour que son temps local d'auto-intersection dépasse n au bout d'un temps n, il revient en fait pour la marche que celui-ci dépasse p sur chaque intervalle de longueur p, et cela q fois. Autrement dit, réaliser l'événement $\mathcal{A}_n$ sur un intervalle de temps de longueur n, revient pour la marche à réaliser q fois l'événement $\mathcal{A}_p$ sur un intervalle de temps de longueur p. L'indépendance des p événements provient du fait qu'on oblige la marche à retourner en zéro, on peut ainsi appliquer la propriété de Markov. Asselah obtient en gros que $\mathbb{P}(\mathcal{A}_n) \geq \mathbb{P}(\mathcal{A}_p)^q$. Ainsi en passant au log, on a que

$$\frac{\log \mathbb{P}(\mathcal{A}_p)}{p} \leq \frac{\log \mathbb{P}(\mathcal{A}_n)}{n}.$$

On obtient le résultat en prenant la $\liminf$ en n à p fixé, et ensuite en prenant la $\limsup$ en p. La constante de déviations étant obtenue par un argument de sous-additivité, l'auteur n'a pas d'expression de sa constante et ne peut donc directement montrer que sa constante est égale à celle de Chen et Mörters. Il applique donc ses résultats à la question des intersections mutuelles traitées par Chen et Mörters, pour montrer que la constante ainsi obtenue est nécessairement la même.

3.3. Extension de la décomposition triangulaire. Nous avons vu dans le paragraphe précédent que la méthode de décomposition triangulaire était propre au cas $p = 2$. Cependant, Asselah [**Ass10**] s'inspire de cette décomposition et en donne une version étendue au cas $p > 1$. Pour deux entiers donnés l_1, l_2 et une subdivision $(b_i, i \in \mathbb{N})$ de $\mathbb{R}^+$, l'auteur utilise l'inégalité

$$(l_1 + l_2)^p \leq l_1^p + l_2^p + 2^p \sum_{i=0}^{+\infty} b_{i+1}^{p-2} l_1 l_2 \; 1\!\!I \left\{ b_i \leq \max\{l_1, l_2\} < b_{i+1} \right\}.$$

l_1 et l_2 doivent être vus comme la division du temps local de la marche à un point donné en deux intervalles de temps. De cette inégalité, l'auteur tire une borne supérieure de I_t du même type que l'égalité (15). En effet celle-ci est donnée par un premier terme correspondant à une somme d'auto-intersections de la marche sur des intervalles de temps de l'ordre de $n/(2^N)$ où N est un entier fixé, les différents termes de la somme étant indépendants, un deuxième terme correspondant aux intersections mutuelles de la marche sur des intervalles de temps $b_{i+1} - b_i$. Néanmoins cette méthode fonctionne moins bien que dans le cas $p = 2$ puisque l'auteur n'obtient que les vitesses de grandes déviations et pas les constantes exactes.

3.4. Moments polynômiaux. C'est la méthode utilisée par Chen et Mörters pour obtenir le théorème 2.9. On notera que le résultat est valable à la fois dans le cas du temps discret et dans le cas du temps continu. Cependant, le cas du temps continu étant un peu plus simple, nous présentons ici cette version de la preuve. Ce résultat étudie la queue de distribution des intersections mutuelles de marches aléatoires en temps infini

$$Q_\infty = \int_0^{+\infty} dt_1 \cdots \int_0^{+\infty} dt_p \ \mathbb{1}\left\{X_{t_1}^{(1)} = \cdots = X_{t_p}^{(p)}\right\}.$$

On a vu (Cf section 3 du chapitre précédent) que Q_∞ était fini presque sûrement dans le cas sur-critique étudié ici. Les auteurs sont donc en mesure de regarder directement le temps infini. Leur idée est d'utiliser la proposition suivante (lemme 2.3 dans [**KM02**]) qui relie les grands moments polynômiaux d'une variable positive aux asymptotiques de sa queue de distribution :

Proposition 3.3. *Soient Y une variable aléatoire positive, $p \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{R}$. Alors on a*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} \log \mathbb{E}\left[\frac{Y^k}{(k!)^p}\right] = -\kappa \Leftrightarrow \lim_{a\to+\infty} a^{-1/p} \log \mathbb{P}(Y > a) = -p \exp(\kappa/p).$$

Les auteurs se ramènent donc à étudier les grands moments polynomiaux de Q_∞. Notons que cette méthode avait déjà été employé par van der Hofstad, König et Mörters dans un article sur le modèle parabolique d'Anderson [**vdHKM06**]. Dans cet article, les auteurs s'intéressaient aux moments polynomiaux du temps local d'auto-intersections dans le cas sous-critique $p(d-2) < d$. Ils montraient (Proposition 2.1 dans [**vdHKM06**]) que $\forall \epsilon > 0$, pour $\alpha_t \gg 1$ et $\alpha_t = O(t^{1/(d+1)-\epsilon})$, pour $R > 0$ et $k \geq t/\alpha_t^2$ on a

$$\mathbb{E}\left[I_t^k \ \mathbb{1}\left\{X_{[0,t]} \subset B_{R\alpha_t}\right\}\right] \leq C k^{kp} \alpha_t^{kp(2-d/q)},$$

où C est une constante strictement positive. Cette estimée permettait d'identifier l'échelle des très grandes déviations. Chen et Mörters ont donc continué dans cette voie des moments polynomiaux pour obtenir le théorème 2.9. Ils cherchent donc à calculer la limite

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} \log \mathbb{E}\left[\frac{Q_\infty^k}{(k!)^p}\right].$$

Dans un premier temps, les auteurs montrent que cette limite existe. Pour cela, ils utilisent l'argument de sous-additivité suivant : $\forall k, l \geq 1$,

$$\mathbb{E}\left[Q_\infty^{k+l}\right]^{1/p} \leq \binom{k+l}{k} \mathbb{E}\left[Q_\infty^{k}\right]^{1/p} \mathbb{E}\left[Q_\infty^{l}\right]^{1/p}$$

où $\binom{k+l}{k}$ sont les coefficients du binôme de Newton. Ils réexpriment ensuite la quantité $\mathbb{E}\left[Q_\infty^k\right]$ en montrant que

$$\mathbb{E}\left[Q_\infty^k\right] = \sum_{z_1,\cdots,z_k \in \mathbb{Z}^d} \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \prod_{l=1}^{k} G\left(z_{\sigma(l-1)} - z_{\sigma(l)}\right) \right)^p \tag{16}$$

où G est la fonction de Green de la marche. Pour considérer les intersections sur tout $\mathbb{Z}^d$, les auteurs ont besoin de projeter la marche sur le tore de rayon R et de faire tendre ensuite le rayon de celui-ci vers l'infini. Malheureusement, du fait qu'ils travaillent en temps infini, les auteurs ne peuvent directement projeter la marche sur le tore puisqu'à ce moment là les intersections mutuelles exploseraient. Ils considèrent donc dans un premier temps les intersections mutuelles des p marches sur un sous-ensemble fini A de $\mathbb{Z}^d$ que l'on notera $Q_\infty(A)$. Compte tenu de (16), les auteurs prouvent en utilisant des arguments de théorie spectrale que

$$\begin{aligned}&\limsup_{k\to+\infty} \frac{1}{k} \log \frac{1}{(k!)^p} \sum_{z_1,\cdots,z_k \in A} \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \prod_{l=1}^{k} G\left(z_{\sigma(l-1)} - z_{\sigma(l)}\right) \right)^p \\ \leq & p \log \sup\left\{ < f^{2p-1}, G f^{2p-1} >, \text{ où } \operatorname{supp}(f) \subset A \text{ et } N_{2p}(f) = 1 \right\}. \end{aligned} \tag{17}$$

A cette étape là de la preuve, les auteurs cherchent à utiliser le résultat (17) obtenu pour les intersections des p marches un sous-ensemble fini A, pour les intersections des p marches projetées sur le tore de rayon R. Afin que les intersections des p marches n'explosent pas, les auteurs utilisent une version de la fonction de Green

$$\tilde{G}_R(y) = \left(\sum_{z \in \mathbb{Z}^d} G^p(2Rz + y) \right)^{1/p}$$

dont on a vu qu'elle était fini (Cf Section 3 du chapitre précédent). Ils montrent que

$$\sum_{z_1,\cdots,z_k \in \mathbb{Z}^d} \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \prod_{l=1}^{k} G\left(z_{\sigma(l-1)} - z_{\sigma(l)}\right) \right)^p \leq \sum_{z_1,\cdots,z_k \in \mathbb{T}_R} \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \prod_{l=1}^{k} \tilde{G}_R\left(z_{\sigma(l-1)} - z_{\sigma(l)}\right) \right)^p. \tag{18}$$

Les auteurs sont désormais en mesure d'appliquer l'inégalité (17) au membre de droite dans (18) pour prouver que

$$\begin{aligned}&\limsup_{k\to+\infty} \frac{1}{k} \log \frac{1}{(k!)^p} \sum_{z_1,\cdots,z_k \in \mathbb{Z}^d} \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \prod_{l=1}^{k} G\left(z_{\sigma(l-1)} - z_{\sigma(l)}\right) \right)^p \\ \leq & p \log \sup\left\{ < f^{2p-1}, \tilde{G}_R f^{2p-1} >, \text{ où } \operatorname{supp}(f) \subset \mathbb{T}_R \text{ et } N_{2p}(f) = 1 \right\}. \end{aligned} \tag{19}$$

Il reste alors à passer à la limite sur la taille du tore dans le membre de droite de l'inégalité (19).

REMARQUE 3.4. *On a vu en section 1.2.2 le lien qui existait entres moments exponentiels et grandes déviations. Si l'on développe l'exponentielle en série, calculer les moments exponentiels revient à calculer les moments polynomiaux. La Proposition 3.3 est donc un autre moyen de voir le lien qui existe entre moments exponentiels et grandes déviations.*

3.5. Densité jointe du temps local. Cette méthode provient d'un résultat de Brydges, van der Hofstad et König [**BvdHK07**]. Dans cet article les auteurs donnent une formule explicite qui donne la densité jointe du temps local d'une chaine de Markov à temps continu définie sur un espace fini (Théorème 2.1 dans [**BvdHK07**]) en fonction du générateur de la marche. Brydges, van der Hofstad et König dérivent de cette écriture de la densité jointe du temps local une borne supérieure pour les moments exponentiels de toute fonctionnelle mesurable du temps local de la chaine de Markov vivant sur un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^d$ (Théorème 3.6 dans [**BvdHK07**]). Cette formule est utilisée par Becker et König dans [**BK11**] pour obtenir une version affaiblie du théorème 2.3 comme nous l'avons vu en section 2.1.1. Elle leur permet d'obtenir l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{t}\log\mathbb{E}\left[\exp\left(t\alpha_t^{-2\lambda}\left\|\frac{1}{t}l_{R\alpha_t,t}\right\|_p\right)\right]\leq \Xi_{d,p}(R\alpha_t,\alpha_t^{-2\lambda})+\epsilon_t$$

où $\lambda = 1-d/(2q)$ et

$$\Xi_{d,p}(R,\theta)=\sup_{\mu\in\mathcal{M}_1(\mathbb{T}_R)}\left\{\theta\left\|\mu\right\|_p-\left\|\sqrt{-A_R\mu}\right\|_2^2\right\}$$

où A_R est le générateur infinitésimal de la marche projetée sur le tore de rayon R.

Le terme ϵ_t est le terme d'erreur qui restreint l'échelle de déviations des auteurs. Il est de l'ordre de $V(R)\frac{\log(t)}{t}$ où $V(R)$ est le volume du tore de rayon R. Il provient directement de la borne supérieure donnée par le Théorème 3.6 dans [**BvdHK07**]. Ainsi la restriction d'échelle est directement imputable à la démonstration de ce théorème à partir de l'expression explicite de la densité jointe du temps local donnée par le théorème 2.1 de [**BvdHK07**]. A ce moment là il reste aux auteurs à passer à la limite en temps et en espace sur la constante $\Xi_{d,p}$. La méthode utilisée ici est celle dont nous nous sommes inspirés pour la démonstration du Théorème 2.3. Elle est donc présentée en section 4.2 du Chapitre 3. On notera que l'expression de la constante diffère de la notre. En effet notre constante est de la forme

$$\inf\left\{\theta\left\|\mu\right\|_{2,R}^2+\left\|\sqrt{-A_R\mu}\right\|_2^2,\mu\in\mathcal{M}_{2p}(\mathbb{T}_R)\right\}.$$

Cette différence d'écriture nous permet en nous inspirant de la méthode introduite par Becker et König d'enlever la restriction des auteurs au cas $d(p-1)<2$.

3.6. Théorème d'isomorphisme de Dynkin-Eisenbaum. Cette méthode est celle introduite par Castell [**Cas10**] dans le cas critique. Nous l'avons ensuite étendue au cas sur-critique [**Lau10b**] et sous-critique [**Lau10a**]. Nous la présentons en détail dans le chapitre suivant.

CHAPITRE 3

Idées des preuves

Dans ce chapitre nous commençons par décrire de manières plus précises les heuristiques des stratégies proposées en Section 1 du chapitre précédent, puis les difficultés majeures des questions traitant des grandes déviations pour les temps locaux d'auto-intersections de marches aléatoires, et enfin les idées principales des démonstrations de nos résultats énoncés dans le chapitre précédent.

1. Heuristiques plus précises

Décrivons maintenant de manière plus précise l'heuristique de la stratégie adoptée par la marche pour réaliser les grandes déviations données en Section 1 du Chapitre 2. On peut citer sur ce sujet l'article de König [**Kö10**].

1.1. Cas sous-critique. Considérons une version renormalisée du temps local :

$$L_t(x) = \frac{\beta_t^d}{t} l_t(\lfloor \beta_t x \rfloor) \text{ avec } \beta_t \to +\infty \text{ et } \lfloor \cdot \rfloor \text{ la partie entière.} \tag{20}$$

On peut noter que L_t est une variable aléatoire vivant dans l'espace des mesures de probabilités sur $\mathbb{R}^d$ noté $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d)$. Ce sont Donsker et Varadhan (voir Section 3 dans [**DV79**]) qui ont en premier étudié les grandes déviations de L_t. Introduisons la fonction de taux suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{I} : \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d) &\to \mathbb{R} \\ \mu &\to \mathcal{I}(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{2} \|\nabla f\|_2^2, \text{ si } f^2 dx = d\mu, \\ +\infty \text{ sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Il est connu que dans le cas de la marche simple, L_t satisfait un principe de grandes déviations ayant pour fonction de taux $\mathcal{I}$ et de vitesse $t\beta_t^{-2}$. Donsker et Varadhan ont prouvé dans [**DV79**] la borne supérieure de ce principe. Récemment, Gantert, König et Shi [**GKS07**] ont donné une preuve complète de ce principe basée sur le théorème de Gartner-Ellis. On peut donc dire que grossièrement

$$\mathbb{P}(L_t \in \cdot) \sim \exp\left(-\frac{t}{\beta_t^2} \inf\left\{\mathcal{I}(\mu), \mu \in \cdot\right\}\right).$$

On cherche maintenant à obtenir à partir de cette estimée pour le temps local, une estimée pour le temps local d'auto-intersections. On écrit :

$$\|L_t\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} L_t(x)^p dx = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\beta^{dp}}{t^p} l_t^p(\lfloor \beta_t x \rfloor) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\beta_t^{d(p-1)}}{t^p} l_t^p\left(\lfloor x \rfloor\right) dx = \frac{\beta_t^{d(p-1)}}{t^p} I_t.$$

Finalement, en notant $\varphi(\cdot) = \|\cdot\|_p^p$, on peut voir que :

$$\mathbb{P}\left(\frac{\beta_t^{d(p-1)}}{t^p} I_t \in \cdot\right) = \mathbb{P}\left(\|L_t\|_p^p \in \cdot\right) = \mathbb{P}\left(L_t \in \varphi^{-1}(\cdot)\right) \tag{21}$$

$$\sim \exp\left(-\frac{t}{\beta_t^2} \inf\left\{\mathcal{I}(\mu), \mu \in \varphi^{-1}(\cdot)\right\}\right) = \exp\left(-\frac{t}{\beta_t^2} \inf\left\{\frac{1}{2}\|\nabla f\|_2^2, \|f\|_2 = 1, \|f\|_{2p}^{2p} \in \cdot\right\}\right).$$

Pour obtenir une heuristique du théorème 2.3, on regarde donc :

$$\frac{\beta_t^2}{t} \log \mathbb{P}\left(I_t \geq t^p \beta_t^{d(1-p)}\right) \sim -\inf\left\{\frac{1}{2}\|\nabla f\|_2^2, \|f\|_2 = 1, \|f\|_{2p}^{2p} \geq 1\right\} = -\chi_{d,p}$$

On a grâce à ce petit calcul, obtenu la vitesse et la constante de déviations. Bien sûr ce calcul n'est à priori pas correct dans l'égalité (21) puisque la fonction φ n'est pas continue. En effet, pour U un ensemble ouvert (ou fermé), $\varphi^{-1}(U)$ n'est pas nécessairement un ensemble ouvert (ou fermé). La difficulté étant bien sûr de rendre ce calcul correct.

1.2. Cas sur-critique. Dans ce cas là, on peut directement utiliser le résultat de grandes déviations de Donsker et Varadhan [**DV75a**] sur le temps local sans renormalisation. En effet les auteurs précédents ont prouvé que l_t/t satisfaisait un principe de grandes déviations de vitesse t et de fonction de taux $\mathcal{J}$ où si A est le générateur infinitésimal de la marche,

$$\begin{aligned}\mathcal{J} : \mathcal{M}_1(\mathbb{Z}^d) &\to \mathbb{R}\\ \mu &\to <\sqrt{\mu}, -A\sqrt{\mu}> .\end{aligned}$$

Alors, grossièrement

$$\mathbb{P}(l_t/t \in \cdot) \sim \exp\left(-t \inf\left\{\mathcal{J}(\mu), \mu \in \cdot\right\}\right).$$

Notons $\varphi(\cdot) = N_p(\cdot)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(I_t \geq b_t^p\right) &= \mathbb{P}\left(\varphi(l_t/t) \geq \frac{b_t}{t}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{l_t}{t} \in \varphi^{-1}([b_t/t, +\infty[)\right)\\ &\sim \exp\left(-t \inf\left\{\mathcal{J}(\mu), \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^d), \mu \in \varphi^{-1}([b_t/t, +\infty[)\right\}\right).\end{aligned}$$

En prenant $f^2 = \mu$, on a

$$\mathbb{P}\left(I_t \geq b_t^p\right) \sim \exp\left(-t \inf\left\{\mathcal{J}(f^2), N_2(f) = 1, N_{2p}^2(f) \geq b_t/t\right\}\right).$$

En reprenant l'énoncé des théorèmes 2.12 et 2.10 :

$$\begin{aligned}\frac{1}{b_t} \log \mathbb{P}\left(I_t \geq b_t^p\right) &\sim -\inf\left\{\frac{t}{b_t} < f, -Af >, N_2(f) = 1, N_{2p}^2(f) \geq b_t/t\right\}\\ &\sim -\inf\left\{\frac{< f, -Af >}{N_{2p}^2(f)}, N_2(f) = 1\right\}.\end{aligned}$$

A nouveau nous avons précisé l'heuristique donnée en Section 1 du Chapitre 2 en confirmant d'abord la vitesse de déviation et en obtenant ensuite une constante de déviation. Il reste à confirmer ces heuristiques par une démonstration exacte.

REMARQUE 1.1. *On peut remarquer que les deux heuristiques précédentes sont valables dans le cas critique. La démonstration du principe de grandes déviations dans le cas critique fait apparaître la formule variationnelle discrète car il s'obtient par dérivation du cas sur-critique. Cependant les formules variationnelles discrète et continue des cas sous-critiques et sur-critiques sont égales, il semble donc naturel de pouvoir obtenir aussi le principe de grandes déviations du cas critique par dérivation du cas sous-critique. De fait, la borne inférieure du cas sous-critique fonctionne aussi dans le cas critique. Seule la borne supérieure pose encore problème. C'est une nouvelle traduction de l'impossibilité de faire un choix optimal dans le temps* τ *que passe la marche dans la boule de rayon* R *(cf Section 1 du Chapitre 2). On ne sait pas si la stratégie de la marche se rapproche du cas sur-critique ou bien du cas sous-critique.*

2. Les difficultés

En ce qui concerne les bornes inférieures, hormis dans le cas sous-critique α-stable, il n'y a pas de réelles difficultés. Les méthodes utilisées ne diffèrent guère de ce que nous avons présenté dans la section précédente. Il s'agit de transférer un principe de grandes déviations par l'intermédiaire d'un principe de contraction (cf Section 1.2.1 du Chapitre 1). Ceci est rendu possible par le fait que la fonctionnelle $f \to N_p(f)$ est semi-continue inférieurement dans la topologie où se réalise le principe de grandes déviations (topologie faible des mesures de probabilités). Dans le cas sous-critique α-stable, ce principe n'a pas été prouvé, on ne peut donc pas appliquer directement un principe de contraction. Une solution serait de suivre le cheminement proposé par Chen et Li (section 4 dans [**CL04**]).

Les difficultés majeures concernent en fait la borne supérieure. D'une part, les principes de grandes déviations que vérifient L_t et l_t/t (Cf Sections 1.1 et 1.2) sont des principes restreints (Cf Section 1.4 du Chapitre 1). La borne supérieure de ces derniers n'est donc valable que sur des compacts. Cette difficulté peut être contournée par un procédé de compactification en projetant la marche sur un tore. Dans ce cas là le principe que vérifie le temps local n'est plus restreint. De plus projeter la marche sur le tore a tendance à augmenter ses intersections, ce qui ne pose pas de problème pour la borne supérieure. La difficulté majeure provient en fait de la mauvaise continuité de la fonctionnelle $f \to \|f\|_p$. En effet celle-ci n'est que semi-continue inférieurement dans la topologie où se réalise le principe de grandes déviations pour le temps local, à savoir la topologie faible sur les mesures. On a vu que cela permet (Cf Section 1.2.1 du Chapitre 1) d'obtenir par contraction la borne inférieure, mais cela nous interdit de le faire pour la borne supérieure.

Ces difficultés sont intrinsèques au problème. Suivant les cas et les méthodes de preuves utilisées (Cf 3 du Chapitre 2), d'autres difficultés se rajoutent. Dans la méthode que nous utilisons, ainsi, par exemple, que dans celle utilisée par Becker et König [**BK11**] ou encore Chen et Mörters [**CM09**], on se retrouve face à un problème purement analytique de convergence de la constante de déviations. En effet, après avoir compactifié en projetant sur le tore, la constante de déviations est donnée par une formule variationelle discrète dépendant à la fois du temps et de l'espace (le tore sur lequel on a projeté). Il faut donc passer à la limite en temps et en espace.

Dans le cas sur-critique, la constante de déviation finale est discrète, il n'y a donc pas de passage au continu à contrôler. Néanmoins, comme le montrent les preuves proposées dans [**CM09**], [**Cas10**] ou [**Lau10b**] ces preuves sont non triviales. Dans la preuve que nous proposons, on passe à la limite en temps avant de passer à la limite en espace.

Le cas sous-critique recèle une difficulté plus grande encore. La constante finale de déviations est en effet donnée par une formule variationelle continue. On doit donc passer d'une formule variationelle discrète à une formule variationelle continue. Il faut donc à partir d'une fonction réalisant l'extremum de la formule discrète définie sur le réseau, construire une fonction du continu qui soit un bon candidat à l'extremum de la formule continue. Nous présentons deux méthodes différentes qui répondent à cette question. Dans les deux cas, la taille du tore R_t dépend de deux paramètres, l'un temporel β_t et l'autre d'espace R. On passe dans un premier temps à la limite en temps et donc en espace pour obtenir une formule variationelle continue pour des fonctions définies sur un tore continu. Il faut dans un deuxième temps faire tendre la taille de ce tore continu vers l'infini.

3. Bornes inférieures

Nous précisons dans cette section les idées des démonstrations que nous proposons pour les différentes bornes inférieures obtenues.

3.1. Cas sous-critique de la marche simple. Nous présentons ici la borne inférieure du Théorème 2.3 du Chapitre 2 obtenue pour une marche simple dans le cas sous-critique. Elle s'obtient par contraction (Cf Section 1.2.1 du Chapitre 1). En effet, pour $R > 0$, sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}(\cdot, \mathrm{supp}(L_t) \subset [-R, R]^d)$, le temps local renormalisé

$$L_t(x) = \frac{\beta_t^d}{t} l_t(\lfloor \beta_t x \rfloor), \text{ pour } x \in \mathbb{R}^d$$

satisfait un principe de grandes déviations de vitesse $t\beta_t^{-2}$ sur $\mathcal{F} = \left\{\mu \in \mathbb{R}_1, \mathrm{supp}(\mu) \subset [-R, R]^d\right\}$ et de fonction de taux $\mathcal{I}(\mu) = \frac{1}{2}\left\|\nabla\sqrt{\mu}\right\|_2^2$. Ce résultat avait partiellement été prouvé par Donsker et Varadhan [**DV79**] dans le cas de la marche simple, puis il a été récemment généralisé par Gantert, König et Shi [**GKS07**]. De plus, la fonctionnelle

$$f \in \mathcal{F} \to \|f\|_{p,R} = \sup\left\{\int_{[-R,R]^d} f(x)g(x), \|g\|_{q,R} = 1\right\}$$

est semi-continue inférieurement. La borne inférieure s'obtient alors directement par contraction.

3.2. Cas critique et sur-critique α-stable. Nous présentons ici la borne inférieure du Théorème 2.19 du Chapitre 2 obtenue pour la borne inférieure de marche α-stables dans les cas critique et sur-critique. Le cheminement est le même dans le cas critique et sur-critique α-stable. Donsker et Varadhan [**DV75a**] ont prouvé que l_t/t satisfaisait un principe de grandes déviations restreint sur $\mathcal{G}$ l'ensemble des mesures de probabilités muni de la topologie faible des mesures avec pour fonction de taux $\mathcal{J}(\nu) =< \sqrt{\nu}, -A\sqrt{\nu} >$ où A est le générateur infinitésimal de la marche. De plus la fonctionnelle

$$\nu \in \mathcal{G} \to \|\nu\|_p = \sup\left\{\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \nu(x)g(x), \|g\|_q = 1\right\}$$

est semi-continue inférieurement. On obtient donc le résultat voulu par contraction.

3.3. Cas sous-critique α-stable. Ce cas correspond à la borne inférieure du Théorème 2.17 du Chapitre 2 que nous n'avons pas encore prouvée. Dans le cas sous-critique α-stable, il semble naturel de penser que le temps local renormalisé

$$L_t(x) = \frac{\beta_t^d}{t} l_t(\lfloor \beta_t x \rfloor), \text{ pour } x \in \mathbb{R}^d$$

satisfait un principe de grandes déviations avec vitesse $t\beta_t^{-\alpha}$. Si nous avions à notre disposition ce résultat, il suffirait comme dans les cas précédents d'appliquer un principe de contraction. Néanmoins ce résultat n'a jamais été prouvé. Nous avons donc pensé à deux possibilités pour répondre à la question. La manière la plus naturelle de faire serait d'adapter la méthode utilisée par Gantert, König et Shi dans [**GKS07**] pour obtenir le principe dans le cas des marches à variance finie. Cette démonstration repose sur l'application d'une version du Théorème de Gartner-Ellis (Cf Section 1.2.2 du Chapitre 1). Une autre solution est de directement calculer les moments exponentiels du temps local d'auto-intersections en suivant par exemple le cheminement proposé par Chen et Li (Théorème 4.1 [**CL04**]). L'une ou l'autre des solutions devrait à priori fonctionner sans trop de difficultés.

Notons ici que pour passer des moments exponentiels au principe de grandes déviations, on utilise une version du célèbre théorème de Gartner-Ellis (Cf Section 1.2.2 du Chapitre 1). Comme nous l'avons fait remarquer (Cf Remarque 1.13 du Chapitre 1) cette méthode n'a une chance d'aboutir que si la fonction de taux est convexe. Or la fonction de taux associée à I_t n'est pas nécessairement convexe puisque elle vaut $\lambda \to \chi_{\alpha,d,p}\lambda^{\alpha/(d(p-1))}$ et que dans le cas sous-critique $\frac{\alpha}{d(p-1)} > \frac{1}{p}$. Il faut en fait considérer $I_t^{1/p}$, c'est à dire exactement la norme p du temps local. La fonction de taux associée à $N_p(l_t)$ est alors $\lambda \to \chi_{\alpha,d,p}\lambda^{\alpha q/d}$, or dans le cas sous-critique, $\alpha q/d > 1$. Elle est donc convexe. C'est pourquoi nous calculons le moment exponentiel de $N_p(l_t)$.

4. Bornes supérieures

Examinons maintenant la borne supérieure. Nous avons vu que c'est dans cette partie que se concentraient les principales difficultés du problème. Dans les trois résultats que nous proposons, celle-ci se divise en deux parties distinctes. La première -commune aux trois preuves- consiste en reprenant une idée de Castell [**Cas10**], à appliquer une version du théorème d'isomorphisme de Dynkin dû à Einsenbaum. Une fois cette partie effectuée, il reste à passer à la limite en temps et en espace, ce qui constitue la deuxième partie et qui est distincte dans les trois preuves présentées. Nous regardons donc dans un premier temps la première partie de la preuve avant de présenter la suite de nos preuves dans les trois cas différents que nous avons étudiés.

On cherche à majorer la quantité suivante :

$$\mathbb{P}\left(I_t \geq t^p \beta_t^{d(1-p)}\right).$$

Dans une première étape on projette la marche aléatoire $(X_t, t \geq 0)$ sur le tore de rayon R_t et on l'arrête à un temps exponentiel de paramètre λ_t indépendant de la marche. Comme on l'a vu dans les heuristiques, projeter la marche sur une boule entraîne une augmentation de son temps local d'auto-intersections. Ce n'est donc pas un problème dans le calcul d'une borne supérieure. Par contre, arrêter la marche à un temps exponentiel a tendance à faire diminuer le temps local d'auto-intersections. Cela a un coût et le choix du paramètre λ_t du temps exponentiel est donc primordial. Il est intimement lié à la fois à la taille de la boule sur laquelle on projette la marche et à la vitesse de la déviation. Il permet aussi d'optimiser afin d'obtenir la bonne constante de déviations. On a :

$$\mathbb{P}\left(I_t \geq t^p \beta_t^{d(1-p)}\right) \leq \exp(\lambda_t t)\mathbb{P}\left(N_{p,R}(l_{R_t,\tau}) \geq t\beta_t^{-d/q}\right),$$

où $l_{R_t,\tau}$ est le temps local de la marche projetée sur le tore de rayon R_t et arrêter à un temps exponentiel τ de paramètre λ_t.

A ce stade, on cherche à appliquer le théorème d'isomorphisme suivant :

Théorème 4.1 (Corollaire 8.1.2 page 364 de [**MR06**]). *Soit $(X_t, t \geq 0)$ une marche aléatoire symétrique de $\mathbb{Z}^d$. Soit τ un temps exponentiel indépendant de la marche aléatoire. Soit $(Z_x, x \in \mathbb{T}_R)$ un processus Gaussien centré, indépendant de τ et de la marche dont la matrice de covariance est donnée par*

$$G_{R,\lambda}(x,y) = \mathbb{E}_x\left[\int_0^\tau 1\!\!1\left\{X_s^{(R)} = y\right\} ds\right],$$

la fonction de Green de la marche projetée et arrêtée. Considérons pour $s \neq 0$ le processus S définit par

$$S_x := l_{R,\tau}(x) + \frac{1}{2}(Z_x + s)^2, \forall x \in \mathbb{T}_R.$$

Alors pour toute fonction mesurable et bornée $F : \mathbb{R}^{\mathbb{T}_R} \to \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{E}\left[F((S_x, x \in \mathbb{T}_R))\right] = \mathbb{E}\left[\left(1 + \frac{Z_0}{s}\right) F\left(\left(\frac{1}{2}(Z_x + s)^2, x \in \mathbb{T}_R\right)\right)\right].$$

Ce théorème nous dit que la loi du processus S est à peu près donnée par la loi du carré du processus Gaussien Z. Mais le processus S est somme du temps local et du carré du processus Gaussien, donc si on arrive à séparer ces deux composantes, on pourra connaître la loi du temps local à partir de la loi du carré du processus Gaussien Z. Et de fait c'est ce que nous faisons. Il est facile de voir que

$$N_{p,R_t}^p(S) \geq N_{p,R_t}^p(l_{R_t,\tau}) + \frac{1}{2^p} N_{2p,R_t}^{2p}(Z + s).$$

Ainsi, par indépendance de Z avec la marche et le temps exponentiel, $\forall\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(N^p_{p,R_t}(l_{R_t,\tau}) \geq t^p\beta_t^{d(1-p)}\right)\mathbb{P}\left(\frac{1}{2^p}N^{2p}_{2p,R_t}(Z+s) \geq t^p\beta_t^{d(1-p)}\epsilon\right)\\ \leq&\mathbb{P}\left(N^p_{p,R_t}(S) \geq t^p\beta_t^{d(1-p)}(1+\epsilon)\right).\end{aligned}$$

On peut maintenant appliquer le théorème d'isomorphisme : $\forall\epsilon > 0$, pour un bon choix de s,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left(N^p_{p,R_t}(l_{R_t,\tau}) \geq t^p\beta_t^{d(1-p)}\right)\\ \leq&\frac{\mathbb{E}\left[\left(1+\frac{Z_0}{s}\right);\frac{1}{2^p}N^{2p}_{2p,R_t}(Z+s) \geq t^p\beta_t^{d(1-p)}(1+\epsilon)\right]}{\mathbb{P}\left(\frac{1}{2^p}N^{2p}_{2p,R_t}(Z+s) \geq t^p\beta_t^{d(1-p)}\epsilon\right)}\\ \lesssim&\frac{\mathbb{P}\left(N^{2p}_{2p,R_t}(Z) \geq (1+\epsilon)2^pt^p\beta_t^{d(1-p)}\right)}{\mathbb{P}\left(N^{2p}_{2p,R_t}(Z) \geq \epsilon 2^pt^p\beta_t^{d(1-p)}\right)}.\end{aligned}$$

On est désormais ramené à regarder les déviations d'une norme d'un processus Gaussien. Pour ce qui est du dénominateur, il suffit d'appliquer l'inégalité de Hölder en écrivant que pour toute fonction f telle que $N_{(2p)',R_t}(f) = 1$,

$$\mathbb{P}\left(N^{2p}_{2p,R_t}(Z) \geq \epsilon 2^pt^p\beta_t^{d(1-p)}\right) \geq \mathbb{P}\left(\sum_{x\in\mathbb{T}_{R_t}} f_xZ_x \geq \epsilon^{1/(2p)}\sqrt{2t}\beta_t^{-d/(2q)}\right).$$

La variable aléatoire $\sum_{x\in\mathbb{T}_{R_t}} f_xZ_x$ est une Gaussienne centrée de variance $\sum_{x,y\in\mathbb{T}_{R_t}} G_{R_t,\lambda}(x,y)f_xf_y$. Nous sommes donc en mesure d'appliquer une inégalité de queue de Gaussienne. On obtient :

$$\mathbb{P}\left(N^{2p}_{2p,R_t}(Z) \geq \epsilon 2^pt^p\beta_t^{d(1-p)}\right) \gtrsim \exp\left(-\frac{\epsilon}{2}t\beta_t^{-d/q}t\rho(\lambda_t,R_t,t)\right)$$

où $\rho(\lambda_t,R_t,t) = \inf\left\{\lambda_tN^2_{2,R_t}(f) - < f, A_{R_t,\lambda_t}f >, N_{2p,R_t}(f) = 1\right\}$ car $G^{-1}_{R_t,\lambda_t} = \lambda_t - A_{R_t,\lambda_t}$.

Reste à s'occuper du numérateur. L'idée est ici d'introduire une médiane M du processus Gaussien afin d'utiliser les inégalités de concentration pour les normes de processus Gaussiens. On peut trouver dans le livre de Ledoux et Talagrand (lemme 3.1 dans [**LT91**] que $\forall u > 0$,

$$\mathbb{P}\left(|N_{2p,R_t}(Z) - M| \leq \sqrt{u}\right) \geq 2\mathbb{P}\left(Y \geq \sqrt{u\rho(\lambda_t,R_t,t)}\right) \lesssim \exp\left(-\frac{u}{2}\rho(\lambda_t,R_t,t)\right)$$

où Y est une Gaussienne centrée réduite et la dernière inégalité provient d'une inégalité de queue de Gaussienne. Admettons pour simplifier les notations qu'on ait fait $\epsilon \to 0$. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(N^{2p}_{2p,R_t}(Z) \geq 2^pt^p\beta_t^{d(1-p)}\right) &\leq \mathbb{P}\left(|N_{2p,R_t}(Z) - M| \geq \sqrt{2t}\beta_t^{-d/(2q)} - M\right)\\ &\lesssim \exp\left(-\frac{\rho(\lambda_t,R_t,t)}{2}\left(\sqrt{2t}\beta_t^{-d/(2q)} - M\right)^2\right).\end{aligned}$$

Si $M \ll \sqrt{t}\beta_t^{-d/(2q)}$, alors

$$\mathbb{P}\left(N_{2p,R_t}^{2p}(Z) \geq 2^p t^p \beta_t^{d(1-p)}\right) \lesssim \exp\left(-t\beta_t^{-d/q}\rho(\lambda_t, R_t, t)\right).$$

Finalement, si $M \ll \sqrt{t}\beta_t^{-d/(2q)}$, avec $\epsilon \to 0$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(I_t \geq t^p \beta_t^{d(1-p)}\right) &\lesssim \exp\left(\lambda_t t + \left(\frac{\epsilon}{2} - 1\right) t\beta_t^{-d/q}\rho(\lambda_t, R_t, t)\right) \\ &\lesssim \exp\left(\lambda_t t - t\beta_t^{-d/q}\rho(\lambda_t, R_t, t)\right)\end{aligned}$$

ou encore

$$= \exp\left(\lambda_t t - \frac{t\beta_t^{-d/q}}{\Upsilon(\lambda_t, R_t, t)}\right). \tag{22}$$

Le cas α-stable sous-critique diffère légèrement car nous avons calculé les moments exponentiels de la norme du temps local. Il y a donc grossièrement une inégalité du type Markov exponentielle en plus. On aboutit donc de la même manière à

$$\forall\theta \text{ tel que } \theta < \beta_t^{\alpha-d/q}\rho(\lambda_t, R_t, t),\ \mathbb{E}\left[\exp\left(\theta\beta_t^{d/q-\alpha}N_p(l_t)\right)\right] \lesssim \exp\left(\lambda_t t\right). \tag{23}$$

On voit qu'il reste à déterminer la limite lorsque le temps t tend vers l'infini. Cependant, on a vu que R_t dépendait à la fois du temps et de l'espace, plus précisément $R_t = R\beta_t$. On doit donc prendre aussi la limite en espace R dans la constante $\rho(\lambda_t, R_t, t)$ ou $\Upsilon(\lambda_t, R_t, t)$. Cela constitue la deuxième partie de la preuve de la borne supérieure et, comme on l'a dit précédemment, celle-ci diffère dans les trois résultats proposés. Nous avons donc séparé ces questions dans les trois sections suivantes.

Remarque 4.2. *La condition $M \gg \sqrt{t}\beta_t^{-d/(2q)}$ est très importante dans notre approche. En effet, comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant, c'est elle qui restreint nos résultats à des échelles où I_t est très grand devant sa moyenne.*

4.1. Cas critique et sur-critique α-stable. C'est la suite de la démonstration du Théorème 2.19 du Chapitre 2. Dans ce cas là, la taille du tore R ne dépend pas du temps t. Compte tenu de la vitesse de déviation du théorème 2.19 et de l'équation (22), il est naturel de poser pour $a > 0$, $\lambda_t = a\beta_t^{-d/q}$. On a alors

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\beta_t^{d/q}}{t} \log\left(I_t \geq t^p\beta_t^{d(1-p)}\right) \lesssim a - \frac{1}{\limsup_{t\to+\infty} \Upsilon(\lambda_t, R, t)}.$$

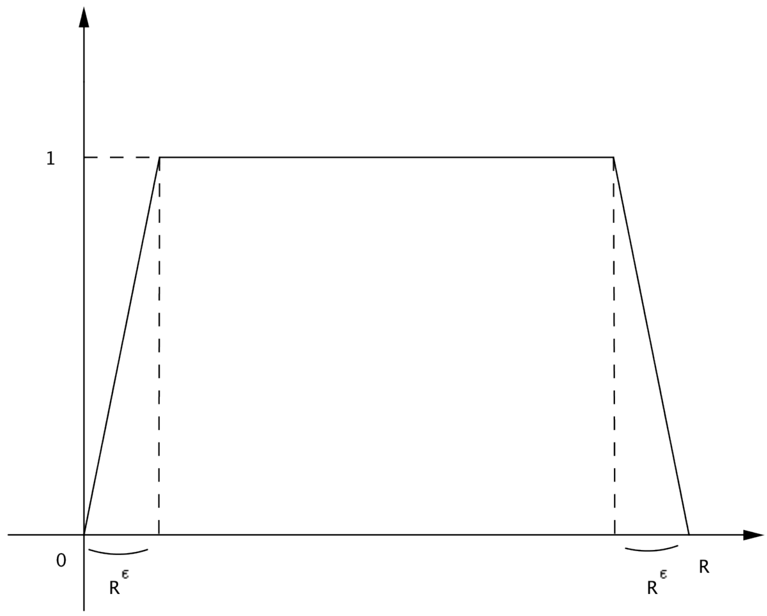
On doit donc montrer que

$$\limsup_{a\to 0}\limsup_{t\to+\infty} \Upsilon(\lambda_t, R, t) \leq \Upsilon,$$

c'est à dire

$$\begin{aligned}\limsup_{a\to 0}\limsup_{t\to+\infty}\ &\sup\left\{< f, G_{R,\lambda_t} f >_R, N_{(2p)',R}(f) = 1\right\} \\ &\leq \sup\left\{< f, Gf >, N_{(2p)'}(f) = 1\right\}.\end{aligned}$$

FIGURE 1. Fonction plateau pour $d = 1$



L'idée est ici de construire à partir du maximiseur du premier membre, le candidat à maximiser le deuxième membre. Considérons f la fonction qui maximise le premier membre. C'est une fonction définit sur $\mathbb{Z}^d$ de période R. On la tronque donc par une fonction plateau ψ de la forme donnée par la figure 1.

Le candidat à réaliser le supremum du deuxième membre est donc $g = \frac{\psi f}{N_{(2p)'}(\psi f)}$. Puisque la troncature nous fait perdre de la matière sur les bords de f, on veut pouvoir choisir f telle que sa norme sur les bords de $[0,R]^d$ soit faible. Suivant une idée de Varadhan, on peut faire ce choix là puisque toute les translatées de f atteignent elles aussi le supremum du premier membre. Grossièrement on a :

$$< g, Gg >= \frac{1}{N^2_{(2p)'}(\psi f)} < \psi f, G(\psi f) > \gtrsim < f, Gf >_R .$$

On doit maintenant comparer G et G_{R,λ_t}. Dans le cas critique et sur-critique α-stable, on utilise ici de manière cruciale l'hypothèse 2.16 (voir Chapitre 2). Elle nous permet d'avoir les estimées de probabilités de transitions pour une catégorie de marches α-stables obtenues par Bass et Levin (voir Théorème 6.3). Ces estimées nous permettent de mieux comprendre le comportement de la fonction de Green en montrant à travers un lemme préliminaire qu'il existe une constante C telle que

$$G_{R,\lambda_t}(x,y) \leq G(x,y) + \frac{C}{\lambda_t R^d}.$$

Ainsi on obtient :

$$< g, Gg > \gtrsim < f, G_{R,\lambda_t} f >_R - C\frac{N^2_{1,R}(f)}{\lambda_t R^d}.$$

Par ailleurs, comme $N_{(2p)',R}(f) = 1$, on a $N_{1,R}(f) \leq R^{d/(2p)}$ et ainsi

$$< g, Gg > \gtrsim < f, G_{R,\lambda_t} f >_R - \frac{C}{\lambda_t R^{d/q}}.$$

En passant au sup sur les fonctions g de norme $(2p)'$ égale à 1, on a

$$\Upsilon \gtrsim \Upsilon(a,R,t) - \frac{C}{\lambda_t R^{d/q}}. \tag{24}$$

Ainsi, pour un choix de R tel que $\lambda_t R^{d/q} \gg 1$, on a répondu à la question.

4.2. Cas sous-critique. C'est la suite de la démonstration du Théorème 2.3 du Chapitre 2. Compte tenu de la vitesse de déviation du théorème 2.3 et de l'équation (22), il est naturel de poser $\lambda_t = a\beta_t^{-2}$. On a alors $\forall a > 0$,

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\beta_t^2}{t} \log \mathbb{P}\left(I_t \geq t^p \beta_t^{d(1-p)}\right) \leq a - \limsup_{t\to+\infty} \beta_t^{2-d/q} \rho(\lambda_t, R_t, t).$$

Dans le cas de la marche simple, le générateur infinitésimal de la marche A est donné par le Laplacien discret. Ainsi,

$$\rho(\lambda_t, R_t, t) = \inf\left\{\lambda_t N^2_{2,R_t}(f) + \frac{1}{2} N^2_{2,R_t}(\nabla f), N_{2p}(f) = 1\right\}.$$

La constante de déviation finale est l'équivalente continue, c'est à dire qu'on cherche à montrer que

$$\begin{aligned}\limsup_{t\to+\infty} \inf &\left\{a\beta_t^{-d/q} N^2_{2,R_t}(f) + \frac{1}{2}\beta_t^{2-d/q} N^2_{2,R_t}(\nabla f), N_{2p}(f) = 1\right\} \\ &\geq \inf\left\{a\left\|h\right\|_2^2 + \frac{1}{2}\left\|\nabla h\right\|_2^2, \left\|h\right\|_{2p} = 1\right\}.\end{aligned} \tag{25}$$

On voit que la difficulté majeure de cette question est de maîtriser le passage du discret au continu. Il faut arriver à partir d'un minimiseur discret du premier membre à construire un candidat continu minimiseur du deuxième membre. Nous nous sommes inspirés d'une méthode proposée par Becker et König [**BK11**] pour la démonstration d'une question analogue. L'idée est d'abord de définir R_t la taille du tore, comme étant $R\beta_t$. Le paramètre β_t correspond au pas de la discrétisation qui va permettre de passer du discret au continu. Soit f la fonction qui minimise le premier membre. On construit la fonction g suivante :

$$g(x) = \beta_t^{d/(2p)} f(\lfloor \beta_t x \rfloor) + \text{ partie linéaire.}$$

On cherche à construire la fonction g de manière à ce qu'elle soit R-périodique et qu'elle conserve la "partie gradient", c'est à dire que

$$\|\nabla g\|_{2,R}^2 = \beta_t^{2-d/q} N_{2,R\beta_t}^2(\nabla f).$$

La renormalisation entrant dans la définition de g permet de se ramener d'un tore de rayon $R\beta_t$ à un tore de rayon R. La fonction $x \to f(\lfloor \beta_t x \rfloor)$ est constante sur chaque cube de longueur $1/\beta_t$ du tore de rayon R. Ainsi, la fonction g est une interpolation linéaire de celle-ci sur chaque cube de longueur $1/\beta_t$. La partie linéaire définit cette interpolation de manière à conserver la "partie gradient". Pour cela (voir figure 2), chaque cube de longueur $1/\beta_t$ est divisé en $d!$ tétraèdres. L'interpolation linéaire est définit sur chacun de ces tétraèdres de manière à ce que la fonction g soit continue partout et qu'elle coïncide avec la fonction $x \to f(\lfloor \beta_t x \rfloor)$ sur chaque sommet des cubes de longueur $1/\beta_t$. Construite ainsi, la fonction g conserve la "partie gradient", c'est à dire que

$$\|\nabla g\|_{2,R}^2 = \beta_t^{2-d/q} N_{2,R\beta_t}^2(\nabla f).$$

La fonction g ayant été construite pour contrôler la norme 2 du gradient, le gros du travail réside dans le contrôle de la norme $2p$ et la norme 2 de g. L'idée est que la première partie de la définition de g, à savoir la fonction $x \to f(\lfloor \beta_t x \rfloor)$ va donner la norme 2 et $2p$ de la fonction f de départ, c'est à dire que :

$$\left\| \beta_t^{d/(2p)} f(\lfloor \beta_t \cdot \rfloor) \right\|_{2p} = N_{2p,R\beta_t}(f) = 1 \text{ et } \left\| \beta_t^{d/(2p)} f(\lfloor \beta_t \cdot \rfloor) \right\|_{2} = \beta_t^{-d/(2q)} N_{2,R\beta_t}(f).$$

Une analyse assez fine du comportement de la partie linéaire permet de montrer que celle-ci va être négligeable, et ainsi de montrer que

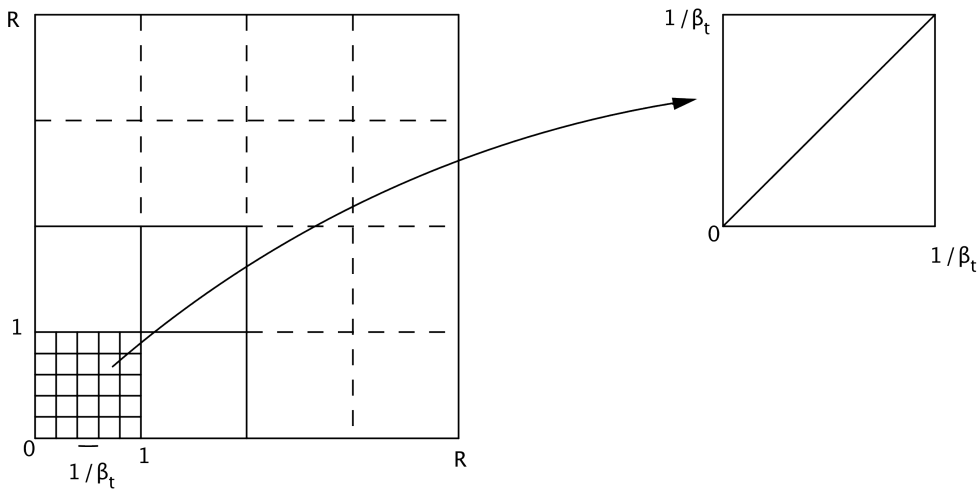
$$\|g\|_{2,R}^2 \lesssim \beta^{-d/q} N_{2,R\beta_t}^2(f) + o_t\left(\beta_t^{2-d/q} N_{2,R\beta_t}^2(\nabla f)\right)$$

et

$$\|g\|_{2p,R}^2 \gtrsim 1 - o_t\left(\beta_t^{2-d/q} N_{2,R\beta_t}^2(\nabla f)\right).$$

On est donc passé d'un fonction discrète $R\beta_t$-périodique à une fonction R-périodique continue. Il faut maintenant passer à une fonction de $\mathbb{R}^d$ candidate à réaliser l'infimum de la formule variationelle finale. Pour cela, on tronque maintenant la fonction g qui est R-périodique par une fonction plateau ψ analogue au cas précédent (voir figure 1) afin de pouvoir la considérer comme une fonction sur $\mathbb{R}^d$. Ainsi la fonction $h = \frac{\psi g}{\|\psi g\|_{2p}}$ est notre candidate pour réaliser l'infimum dans le deuxième membre de (25). La pente de la troncature est choisie de façon à ce

FIGURE 2. Construction de l'interpolation



que l'on perde peu sur la "partie gradient", et de la même manière que dans le cas précédent, les translatées de f atteignant elles-aussi l'infimum, on peut choisir une des translatées de f telle que l'on perde peu sur la norme $2p$ en tronquant g. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} a\|h\|_2^2+\frac{1}{2}\|\nabla h\|_2^2 &= \frac{1}{\|\psi g\|_{2p}^2}\left(a\|\psi g\|_2^2+\frac{1}{2}\|\nabla(\psi g)\|_2^2\right) \\ &\sim \frac{1}{\|g\|_{2p,R}^2}\left(a\|g\|_{2,R}^2+\frac{1}{2}\|\nabla g\|_{2,R}^2\right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$a\|h\|_2^2+\frac{1}{2}\|\nabla h\|_2^2 \lesssim a\beta_t^{-d/q}N_{2,R\beta_t}^2(f)+\frac{1}{2}\beta_t^{2-d/q}N_{2,R\beta_t}^2(\nabla f)+o_t\left(\beta_t^{2-d/q}N_{2,R\beta_t}^2(\nabla f)\right).$$

On conclut la preuve en passant à l'inf sur les fonctions f de norme $2p$ égales à 1.

Remarque 4.3. *La fonction g construite est une interpolation de la fonction f de départ. Les deux fonctions coïncident sur les sommets du réseau et la valeur de l'interpolation sur chaque tétraèdre dépend uniquement de la valeur de f sur les sommets de ce dernier. L'interpolation est donc locale, ceci est à mettre en lien avec le fait que l'opérateur $g \to \|\nabla g\|_2$ est local.*

4.3. Cas sous-critique α-stable. C'est la suite de la démonstration du Théorème 2.17 du Chapitre 2. A ce niveau de la démonstration, on a montré que

$$\forall\theta \text{ tel que } \theta<\beta_t^{\alpha-d/q}\rho(\lambda_t,R_t,t),\ \mathbb{E}\left[\exp\left(\theta\beta_t^{d/q-\alpha}N_p(l_t)\right)\right]\lesssim \exp\left(\lambda_t t\right).$$

Compte tenu de la vitesse de la déviation, il est naturel de poser $\lambda_t = a\beta_t^{-\alpha}$. On a alors :

$$\forall\theta \text{ tel que } \theta<\beta_t^{\alpha-d/q}\rho(\lambda_t,R_t,t),\ \frac{\beta_t^\alpha}{t}\mathbb{E}\left[\exp\left(\theta\beta_t^{d/q-\alpha}N_p(l_t)\right)\right]\lesssim a.$$

La constante de déviation $\rho(\lambda_t,R_t,t)$ apparaît ici comme borne supérieure du domaine de validité du paramètre θ. On doit comme précédemment trouver une borne inférieure de celle-ci. Comme dans le cas de la marche simple, la constante de déviation finale vit dans le continu. Ainsi pour passer du discret au continu on va comme précédemment faire un changement d'échelle en posant $R_t = R\beta_t$ la taille du tore. Le résultat étant valable quelque soit θ tel que $\theta<\beta_t^{\alpha-d/q}\rho(\lambda_t,R_t,t)$, il reste donc à trouver une minoration à la limite suivante :

$$\liminf_{R\to+\infty}\liminf_{t\to+\infty}\inf\left\{a\beta_t^{-d/q}N_{2,R\beta_t}^2(f)-<f,A_{R\beta_t}f>_{R\beta_t},N_{2,R\beta_t}(f)=1\right\}.$$

Une difficulté supplémentaire dans le cas des marches α-stables provient du fait que le générateur de la marche n'est plus le Laplacien discret. De fait nous ne connaissons que peu de choses sur ce type de marche. On peut trouver dans Le Gall et Rosen [**LGR91**] que μ la loi de l'incrément de la marche vérifie

$$F(\mu)(\omega) \underset{\omega\to 0}{=} 1-|\omega|^\alpha+o(|\omega|^\alpha). \qquad (26)$$

Cette hypothèse étant la seule que nous avions, et la constante finale de déviations étant exprimée en Fourier, nous avons travaillé sur une version Fourier de la constante de déviation $\rho(\lambda_t, R_t, t)$. Dans cette optique, on peut reformuler celle-ci en :

$$\begin{aligned}&\beta^{\alpha-d/q}\rho(\lambda_t, R_t, t)\\&=\inf\left\{a\beta_t^{-d/q}N^2_{2,R\beta_t}(f)+\frac{\beta_t^{\alpha-d/q}}{(R\beta_t)^d}\sum_{x\in\mathbb{T}_{R\beta_t}}|F_{R\beta_t}(f)(z)|^2\left(1-F(\mu)\left(\frac{x}{R\beta_t}\right)\right), N_{2p,R\beta_t}(f)=1\right\}.\end{aligned}$$

On cherche donc à montrer que

$$\begin{aligned}&\liminf_{R\to+\infty}\liminf_{t\to+\infty}\\&\inf\left\{a\beta_t^{-d/q}N^2_{2,R\beta_t}(f)+\frac{\beta_t^{\alpha-d/q}}{(R\beta_t)^d}\sum_{x\in\mathbb{T}_{R\beta_t}}|F_{R\beta_t}(f)(z)|^2\left(1-F(\mu)\left(\frac{x}{R\beta_t}\right)\right), N_{2p,R\beta_t}(f)=1\right\}\\&\geq\inf\left\{a\,\|g\|_2^2+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}|\omega|^\alpha|\mathcal{F}g(\omega)|^2, \|g\|_{2p}=1\right\}=:\rho(a),\end{aligned}$$

car $\inf\{a,\ \rho(a)>\theta\}=\left(\frac{\theta}{\rho}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-d/q}}$ qui est le résultat voulu. Comme précédemment il faut construire à partir du minimiseur f de la formule discrète un candidat pour minimiser la formule continue. Admettons un instant pour simplifier les notations que nous n'ayons pas projeté la marche sur le tore de rayon $\mathbb{T}_{R\beta_t}$. A ce moment là, la formule variationelle discrète devient

$$\inf\left\{aN_2^2(f)+\int_{[0,2\pi]^d}|F(f)(\omega)|^2\left(1-F(\mu)(\omega)\right)d\omega, N_{2p}(f)=1\right\}.$$

L'idée a été de chercher la fonction g sous forme de convolée. C'est à dire que l'on pose

$$g(\cdot)=f*\varphi(\cdot):=\sum_{z\in\mathbb{Z}^d}f(z)\varphi(\cdot-z)$$

où φ est une fonction à déterminer. A ce moment là,

$$\int_{\mathbb{R}^d}|\omega|^\alpha|\mathcal{F}g(\omega)|^2=\int_{\mathbb{R}^d}|\omega|^\alpha|F(f)(\omega)\mathcal{F}(\varphi)(\omega)|^2d\omega.$$

Comme dans le cas précédent, on demande en premier lieu à la fonction g de conserver la "partie gradient", désormais représentée par la partie transformée de Fourier. En posant

$$\mathcal{F}(\varphi)(\omega)=\sqrt{\frac{1-F(\mu)(\omega)}{|\omega|^\alpha}}\ \mathbb{I}\left\{\omega\in[0,2\pi]^d\right\}$$

on a bien

$$\int_{\mathbb{R}^d}|\omega|^\alpha|\mathcal{F}g(\omega)|^2=\int_{[0,2\pi]^d}|F(f)(\omega)|^2\left(1-F(\mu)(\omega)\right)d\omega.$$

Il reste maintenant à vérifier que construite ainsi, les normes 2 et $2p$ de g sont proches de celles de f. On travaille d'abord sur la norme 2. On remarque que comme la marche aléatoire est dans le domaine d'attraction d'un processus α-stable, on sait que μ vérifie (26) et donc que $\lim_{\omega\to 0} \mathcal{F}(\varphi)(\omega) \underset{0}{=} 1$. Par Parseval, on a :

$$\begin{aligned}\|g\|_2 &= \|f * \varphi\|_2 = \|\mathcal{F}(f * \varphi)\|_2 = \|F(f)\mathcal{F}(\varphi)\|_2 \\ &\leq \|F(f)\|_2 + \|F(f)(1 - \mathcal{F}(\varphi))\| \lesssim N_2(f) + \text{ négligeable.}\end{aligned}$$

La partie la plus délicate de la preuve est de contrôler la norme $2p$ de f. En utilisant la formule d'inversion de Fourier et la définition de $\mathcal{F}(\varphi)$, on peut voir que

$$\begin{aligned}g(x) &= \int_{[0,2\pi]^d} F(f)(\omega)\mathcal{F}(\varphi)(\omega) \exp\left(2i\pi < x, \omega >\right) d\omega \\ &= \int_{[0,2\pi]^d} F(f)(\omega) \exp\left(2i\pi < x, \omega >\right) d\omega \\ &\quad - \int_{[0,2\pi]^d} F(f)(\omega) \left(1 - \mathcal{F}(\varphi)(\omega)\right) \exp\left(2i\pi < x, \omega >\right) d\omega \end{aligned} \tag{27}$$

Notons $h(x)$ le premier terme de (27). On peut remarquer que $h(\lfloor\cdot\rfloor) = f(\cdot)$. Ainsi, en introduisant la fonction

$$\bar{h}(x) = \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} \bar{h}_z \ \mathbb{I}\left\{x \in Q(z)\right\}$$

où $Q(z)$ est le cube unité centré en z et $\bar{h}_z = \int_{Q(z)} h(x)dx$, on a que

$$\begin{aligned}\|h\|_{2p} &\geq \|h(\lfloor\cdot\rfloor)\|_{2p} - \left\|\bar{h} - h(\lfloor\cdot\rfloor)\right\|_{2p} - \left\|h - \bar{h}\right\|_{2p} \\ &\geq N_{2p}(f) - \text{ négligeable.}\end{aligned}$$

On montre que ces derniers termes sont négligeables en utilisant l'inégalité de Poincarré. C'est d'ailleurs dans le but de l'utiliser que nous avons introduit la fonction approximante $\bar{h}$. Il reste à montrer que deuxième terme de (27) est négligeable. On le montre en utilisant à nouveau le fait que μ vérifie (26) et donc que $\mathcal{F}(\varphi)(\omega) \underset{0}{=} 1$.

Le fait d'avoir supposé que nous n'avions pas projeté sur le tore de rayon $R\beta_t$ occulte une difficulté majeure de la preuve qui est le passage du discret au continu puisque la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathbb{Z}^d$ est une fonction de $\mathbb{R}^d$. La transformée de Fourier fait alors le travail de passer dans le continu. Par contre, la transformée de Fourier d'une fonction sur $\mathbb{T}_{R\beta_t}$ est une fonction sur $\mathbb{T}_{R\beta_t}$, on reste donc dans le discret. L'idée a donc été de raffiner la méthode précédente en posant

$$g_R(\cdot) = \beta_t^{d/(2p)} h * \varphi(\beta_t \cdot) := \beta_t^{d/(2p)} \sum_{k\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} h(k)\varphi(\beta_t \cdot -k).$$

La procédure est la même que celle présentée précédemment. On détermine φ de manière à conserver la partie donnée par la transformée de Fourier. La fonction ainsi construite est une fonction R-périodique et $1/\beta_t$ correspond au pas de la discrétisation pour passer du discret au continu. Tous les termes que nous avons considérés comme négligeables le sont grâce à ce pas de discrétisation. Ils disparaissent donc lorsque $\beta_t \to +\infty$. Nous avons donc réussi à montrer que

$$\liminf_{t\to+\infty} \inf \left\{ a\beta_t^{-d/q} N^2_{2,R\beta_t}(f) - < f, A_{R\beta_t} f >_{R\beta_t}, N_{2,R\beta_t}(f) = 1 \right\}$$
$$\geq \inf \left\{ a \left\| g \right\|_{2,R} + R^d \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} \left| \mathfrak{F}_R(g)(z) \right|^2 \left| z/R \right|^2, \left\| g \right\|_{2p,R} = 1 \right\}$$

Remarque 4.4. *Dans tout les cas, on peut voir que le choix de λ_t est égal à $a\beta_t^{-\max(\alpha,d/q)}$.*

Remarque 4.5. *Contrairement au cas de la marche à variance finie, l'opérateur considéré ici $f \to \int_{\mathbb{R}^d} \left| \omega \right|^\alpha \left| \mathfrak{F} g(\omega) \right| d\omega$ est non local. Une interpolation locale avait donc peu de chance de convenir. L'idée d'utiliser une convolée provient de la nécessité de répondre à cette caractéristique de l'opérateur.*

5. Identification des bornes et non dégénérescence des constantes

5.1. Cas sous-critique. La borne inférieure donne directement la bonne constante $\chi_{d,p} = \inf \left\{ \frac{1}{2} \left\| \nabla g \right\|_2^2, \left\| g \right\|_2 = \left\| g \right\|_{2p} = 1 \right\}$. La borne supérieure donne la constante suivante :

$$\inf \left\{ a - \rho(a), a > 0 \right\} \text{ où } \rho(a) = \inf \left\{ a \left\| g \right\|_2^2 + \frac{1}{2} \left\| \nabla g \right\|_2^2, \left\| g \right\|_{2p} = 1 \right\}.$$

Afin d'égaliser ces constantes, on utilise la renormalisation $g_\gamma(\cdot) = \gamma^{d/(2p)} g(\beta\ \cdot)$ qui permet après optimisation en γ de pouvoir calculer explicitement l'infimum en a. Une dernière renormalisation permet de montrer que

$$\inf \left\{ a - \rho(a), a > 0 \right\} = -\chi_{d,p}.$$

On a vu dans la proposition 2.1 du Chapitre 2 que la constante $\chi_{d,p}$ était liée à la meilleure constante dans une inégalité du type Gagiardo-Nirenberg, cela permet de montrer que celle-ci est non dégénérée.

5.2. Cas critique et sur-critique α-stable. Dans ce cas là, la borne supérieure est donné par $-\frac{1}{\Upsilon}$ où $\Upsilon = \sup \left\{ < f, Gf >, \left\| f \right\|_{(2p)'} = 1 \right\}$ tandis que la borne inférieure est donnée par $-\Theta$ où $\Theta = \inf \left\{ \frac{< f, -A, f >}{N^2_{2p}(f)}, N_2(f) = 1 \right\}$. L'identification des deux constantes se fait en deux temps. Dans un premier temps, on remarque que la démonstration du théorème 2.19 donne $1/\Upsilon \leq \Theta$. Il reste donc à montrer l'inégalité inverse. Cela découle du fait que $-A \circ G = id$ et que G peut-être vu comme un application de $l^{(2p)'}(\mathbb{Z}^d)$ dans $l^{2p}(\mathbb{Z}^d)$. En effet, admettons que la fonction g approche le supremum dans la définition de Υ et posons $f = \frac{Gg}{\Upsilon}$. On peut remarquer que $N_{2p}(f) \geq 1$ et que $N_2(f) < +\infty$. Ainsi

$$\Upsilon \sim < g, Gg > = < -A \circ Gg, Gg > = < -\Upsilon A f, \Upsilon f >$$
$$\geq \Upsilon^2 \inf \left\{ < f, -Af >, N_{2p}(f) \geq 1, N_2(f) < +\infty \right\} = \Upsilon^2 \Theta,$$

et donc $\frac{1}{\Upsilon} \geq \Theta$. La non-dégénérescence des constantes se montre séparément pour le cas critique et le cas sur-critique. Ce dernier est assez simple puisqu'il provient du fait que sous l'hypothèse $p(d-\alpha) > d$, la norme p de G est finie. Pour le cas critique, nous avons invoqué un résultat de Varopoulos [**Var85**] qui relie estimées des probabilités de transition et inégalité fonctionnelle sur la forme de Dirichlet.

6. De l'échelle à respecter

Nous revenons plus en détail sur la Remarque 4.2. On a vu qu'il était nécessaire d'avoir $M^2 \ll t\beta_t^{-d/q}$. Reste donc à calculer l'ordre de grandeur de M pour déterminer ce que la condition précédente implique. On rappelle que M est une médiane du processus Gaussien Z centré et de matrice de covariance G_{R_t,λ_t}. Comme la variable aléatoire $\|Z\|_{2p,R_t}$ est positive, on a $M \leq 2\mathbb{E}[\|Z\|_{2p,R_t}]$ et il est donc facile de voir que $M^2 = O(R_t^{d/p} G_{R_t,\lambda_t}(0,0))$. Ainsi l'ordre de grandeur de M est liée à celui de la fonction de Green de la marche projetée sur le tore de rayon R_t et arrêtée au temps exponentiel τ. La fonction de Green mesurant le temps moyen passé par la marche sur chaque site, son comportement asymptotique est lié à deux paramètres. D'une part la relation entre dimension et moment de l'incrément, et d'autre part la relation entre taille du tore sur lequel la marche a été projeté et le temps exponentiel d'arrêt de la marche. En effet, si $\alpha \geq d$, alors la marche est récurrente, et G_{R_t,λ_t} devrait être grand. Par contre si $\alpha < d$, la marche est transitoire et G_{R_t,λ_t} devrait être petit. De la même manière, la marche met un temps de l'ordre de R_t^α pour sortir d'une boule de rayon R_t. La moyenne du temps exponentiel τ étant $1/\lambda_t$, si $1/\lambda_t \leq R_t^\alpha$ alors la marche est arrêtée avant de sortir de la boule, et donc son comportement est le même que celui de la marche non projetée. On ne fait donc pas grossir artificiellement G. Par contre si $1/\lambda_t \gg R_t^\alpha$, la marche est arrêtée après être sorti de la boule, la projection sur le tore fait alors augmenter la valeur de G_{R_t,λ_t}. Ces différents paramètres sont pris en compte dans les propositions suivantes qui donnent l'ordre de grandeur de la fonction de Green dans les différents cas que nous avons étudiés.

6.1. Marches à variance finie. On s'intéresse ici au cas sous-critique. On rappelle que dans ce cas là $\lambda_t = a\beta_t^{-2}$.

PROPOSITION 6.1. *Considérons la marche simple sur $\mathbb{Z}^d$. Quelque soit $a > 0$ on pose $\lambda_t = a\beta_t^{-2}$. Supposons de plus que $\beta_t \gg 1$, alors $\forall a, R > 0$*

(1) *Pour $d = 1$, $G_{R\beta_t,\lambda_t}(0,0) = O(\beta_t)$.*
(2) *Pour $d = 2$, $G_{R\beta_t,\lambda_t}(0,0) = O(\log \beta_t)$.*
(3) *Pour $d \geq 3$, $G_{R\beta_t,\lambda_t}(0,0) = O(1)$.*

L'idée de la démonstration est d'utiliser des estimées des probabilités de transition pour des marches à valeurs dans des espaces finis. Ce type de marche vérifiant des inégalités de Nash, on a comme conséquence des théorèmes 3.3.15 et 2.3.1 dans [**SC97**] des inégalités du type

$$\exists C > 0 \text{ tel que } \forall s > 0, \ \left| p_s^{R\beta_t}(0,0) - \frac{1}{(R\beta_t)^d} \right| \leq \frac{C}{s^{d/2}}$$

où $p_s^{R\beta_t}$ est la probabilité de transition de la marche projetée sur le tore de rayon $R\beta_t$. Compte tenu de ces estimées, il est facile de conclure la démonstration. Ainsi en utilisant le fait que $M^2 = O((R\beta_t)^{d/p} G_{R\beta_t,\lambda_t}(0,0))$ on a

(1) Pour $d = 1$, $M^2 = O(\beta_t^{2-1/q})$.

(2) Pour $d = 2$, $M^2 = O(\beta^{2/p} \log \beta_t)$.

(3) Pour $d \geq 3$, $M^2 = O(\beta_t^{d/p})$.

La contrainte d'échelle provenant de la borne supérieure qui est on le rappelle $M^2 \ll t\beta_t^{-d/q}$ devient alors :

(1) Pour $d = 1$, $\beta_t^2 \ll t$.

(2) Pour $d = 2$, $\beta_t^2 \ll \frac{t}{\log t}$.

(3) Pour $d \geq 3$, $\beta_t^d \ll t$.

On rappelle que nous avons vu dans la remarque 2.4 du Chapitre 2 que ces contraintes correspondent aux échelles de très grandes déviations. C'est à dire que l'on regarde la probabilité que I_t soit très grand devant sa moyenne. Notre incapacité à passer à l'échelle de la moyenne provient de cette nécessité à compenser la médiane du processus Gaussien.

6.2. Marches α-stables.

6.2.1. *Cas sous-critique.* On rappelle que dans ce cas-là, $\lambda_t = a\beta_t^{-\alpha}$. On aimerait dans le cas des marches α-stables avoir un résultat équivalent à la proposition 6.1 donné par la proposition suivante :

Proposition 6.2. *Soit $\alpha \in]0, 2]$. Quelque soit $a, R > 0$ on pose $\lambda = a\beta_t^{-\alpha}$. Supposons de plus que $\beta_t \gg 1$, alors*

(1) *Pour $\alpha > d$, $G_{R\beta_t,\lambda_t}(0, 0) = O(\beta_t^{\alpha-d})$.*

(2) *Pour $\alpha = d$, $G_{R\beta_t,\lambda_t}(0, 0) = O(\log \beta_t)$.*

(3) *Pour $\alpha < d$, $G_{R\beta_t,\lambda_t}(0, 0) = O(1)$.*

Malheureusement nous n'avons pas obtenu ce résultat dans toute sa généralité. La difficulté de ce résultat vient du fait que l'estimée suivante,

$$\exists C > 0 \text{ tel que } \forall s > 0, \ \left| p_s^{R\beta_t}(0, 0) - \frac{1}{(R\beta_t)^d} \right| \leq \frac{C}{s^{d/\alpha}}.$$

qui semble naturelle, n'est pas -à notre connaissance- prouvée à ce jour. Il nous a donc fallu faire sans. Nous avons donc utilisé de puissants résultats d'estimées de probabilités de transitions pour les marches α-stables vérifiant l'hypothèse 2.16, c'est à dire celles dont la loi de l'incrément μ vérifie

$$\exists C_1, C_2 > 0 \text{ tels que } \forall x, y \in \mathbb{Z}^d, \ \frac{C_1}{|y - x|^{d+\alpha}} \leq \mu(y - x) \leq \frac{C_2}{|y - x|^{d+\alpha}}.$$

Un des inconvénients majeurs de cette hypothèse est qu'elle exclut le cas de la marche simple. Cependant, cette hypothèse sert exclusivement à obtenir des estimées pour la fonction de Green. Or nous avons vu dans la section précédente, que dans le cas de la marche simple, les connaissances étant nettement plus développées, on a des estimées de probabilité de transition nous permettant d'obtenir le résultat voulu sans hypothèse supplémentaire. On se place sous l'hypothèse 2.16 afin d'utiliser les résultats suivants dus à Bass et Levin [**BL02**].

THÉORÈME 6.3. *Bass et Levin 02.*
Sous l'hypothèse 2.16, il existe une constante C telle que pour tout $t > 0$ et pour tout $x, y \in \mathbb{Z}^d$,

$$p_t(x,y) \leq C \left(t^{-d/\alpha} \wedge \frac{t}{|x-y|^{d+\alpha}} \right)$$

A l'aide de ce résultat, nous avons pu obtenir les estimées précédentes pour la fonction de Green. Comme dans le cas des marches à variance finie, les estimées de la fonction de Green données par la proposition 6.2 donnent des estimées de la médiane du processus Gaussien puisque $M^2 = O(R^{d/p} G_{R,\lambda}(0,0))$. Ainsi,

(1) Pour $\alpha > d$, $M^2 = O(\beta_t^{\alpha - d/q})$.
(2) Pour $\alpha = d$, $M^2 = O(\beta^{d/p} \log \beta_t)$.
(3) Pour $\alpha < d$, $M^2 = O(\beta_t^{d/p})$.

Couplées avec la contrainte d'échelle $M^2 \ll t\beta_t^{-d/q}$, ces résultats donnent les conditions suivantes :

(1) Pour $\alpha > d$, $\beta_t^\alpha \ll t$.
(2) Pour $\alpha = d$, $\beta_t^d \ll \frac{t}{\log t}$.
(3) Pour $\alpha < d$, $\beta_t^d \ll t$.

On rappelle comme on l'a vu lors de l'énoncé du théorème 2.17 que ce sont ces contraintes qui restreignent nos résultats à des résultats du type très grandes déviations.

REMARQUE 6.4. *L'hypothèse 2.16 n'est utilisée que pour avoir des estimées de la fonction de Green. Ainsi, elle ne joue pas de rôle dans les intersections de la marche et nous pensons qu'elle n'est pas nécessaire à l'obtention du résultat de grandes déviations. C'est pourquoi nous l'avons qualifiée d'hypothèse technique. Une question intéressante serait donc d'obtenir les estimées de la fonction de Green en se passant de cette hypothèse.*

6.2.2. *Cas critique et sur-critique.* On rappelle que dans ce cas là $\lambda_t = a\beta_t^{-d/q}$ et qu'on a toujours la condition $M^2 \ll t\beta_t^{-d/q}$ qui sert à compenser la médiane du processus Gaussien. On rappelle que $M^2 = O\left(R^{d/p} G_{R,\lambda_t}(0,0)\right)$, ainsi de la même manière que précédemment on cherche des estimées de la fonction de Green. On se place à nouveau sous l'hypothèse 2.16 pour obtenir l'estimée suivante,

$$G_{R,\lambda_t}(0,0) \leq G(0,0) + \frac{1}{\lambda_t R^d}.$$

Ainsi, compte tenu du fait que $p(d-\alpha) \geq d$, on a nécessairement $d > \alpha$, la marche est donc transitoire. De ce fait, à partir du moment où $\lambda_t R^d \gg 1$, on a $G_{R,\lambda_t}(0,0) = O(1)$ et donc $M^2 = O(R^{d/p})$. La condition $M^2 \ll t\beta_t^{-d/q}$ devient donc $R^d \ll t^p \beta_t^{-dp/q}$. Par ailleurs, on a vu que dans cas là, la convergence de la constante était conditionnée au fait que $\lambda_t R^{d/q} \gg 1$ (Cf (24)), c'est à dire $R^d \gg \beta_t^d$. Les deux conditions $R^d \ll t^p \beta_t^{-dp/q}$ et $R^d \gg \beta_t^d$ donnent $\beta_t \ll t$ ce qui est équivalent à dire que l'on se place sur une échelle de très grandes déviations (Cf théorème 2.19).

Nous avons essayé de prouver avec cette méthode des résultats de déviations modérées. Grossièrement, la médiane du processus Gaussien doit compenser l'espérance du temps local d'auto-intersections. Il faudrait donc dans un premier temps réussir à montrer que $|M^2 - \mathbb{E}[I_t]| = o(M^2)$ et déterminer l'ordre de cette différence qui devrait être celui de l'écart type du temps local d'auto-intersection. Si, comme nous l'avons dit en section 2.4, on connaît bien $\mathbb{E}[I_t]$ grâce aux résultats de type loi des grands nombres, il n'en est pas de même de la médiane. On notera d'ailleurs que ce sont les estimées de celle-ci (par l'intermédiaire de la fonction de Green) qui restreignent nos résultats.

CHAPITRE 4

Large deviations for self-intersection local times of stable random walks

ABSTRACT. Let $(X_t, t \geq 0)$ be a random walk on $\mathbb{Z}^d$. Let $l_T(x) = \int_0^T \delta_x(X_s)ds$ the local time at the state x and $I_T = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} l_T(x)^q$ the q-fold self-intersection local time (SILT). In [**Cas10**] Castell proves a large deviations principle for the SILT of the simple random walk in the critical case $q(d-2) = d$. In the supercritical case $q(d-2) > d$, Chen and Mörters obtain in [**CM09**] a large deviations principle for the intersection of q independent random walks , and Asselah obtains in [**Ass09**] a large deviations principle for the SILT with $q = 2$. We extend these results to an α-stable process (i.e. $\alpha \in]0, 2]$) in the case where $q(d - \alpha) \geq d$.

1. Introduction

Let $(X_t, t \geq 0)$ be a continous time random walk on $\mathbb{Z}^d$ with jump rate 1, whose generator is denoted by A :

$$Af(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \mu(y - x)(f(y) - f(x))$$

where μ is the law of the jump, i.e. the law of $\tilde{X}_1$ where $(\tilde{X}_n, n \in \mathbb{N})$ is the embedded discrete time Markov chain of $(X_t, t \geq 0)$. We assume that μ is in the domain of attraction of a stable law of index α and that μ is symmetric. More precisely we assume the following assumption :

1.0.2.1. Assumption 1 :

– $\exists\, c_1, c_2 > 0$ such that $\forall x, y \in \mathbb{Z}^d$, $\frac{c_1}{|y-x|^{d+\alpha}} \leq \mu(y - x) \leq \frac{c_2}{|y-x|^{d+\alpha}}$.

– μ is symmetric.

In this article we are interested in the q-fold self intersection local time (SILT), i.e. :

$$I_T = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} l_T(x)^q \quad \text{with} \quad l_T(x) = \int_0^T \delta_x(X_s)ds.$$

The study of self-intersection is naturally arising from both probability and physics. In probability this quantity naturally arises from study of random walk in random scenery for instance. In physics we can cite the Polaron problem in quantum mechanics and the study of polymers in statistical mechanic. For the latter, represent a polymer as a chain of N molecules which is considered as a random walk $(X_n, n \in [0, N])$. Physicists study measures of the form $\exp(-\beta I_N)$ where I_N is the discrete analogous of I_T. When $\beta < 0$, the measure favors unfolded polymers with few intersections, whereas when $\beta > 0$, the measure favors the self-intersections of the polymers.

To give an idea of the behaviour of I_T to the reader, we focus on the most studied case with $\alpha = 2$ and $q = 2$, which means that we consider the l_2-norm of the local times of a random walk with finite variance. The first idea is to point out the very important role played by the transience or the recurrence of the walk. Of course, when the walk is recurrent (dimension 1 and 2), it will intersect itself much more than when it is transient (dimension $d \geq 3$). Hence the SILT will be much more large. More precisely for $d = 1$, $I_T \sim T^{3/2}$; for $d = 2$, $I_T \sim T \log(T)$; and for $d \geq 3$, the walk being transient it spends a time of order 1 at each site and $I_T \sim T$.

The difference between recurrence and transience reappears in the central limit theorem. In dimension 1 and 2, we have a convergence to the local time of a Brownian motion (renormalized for $d = 2$), while for $d = 3$ a convergence to a normal law takes place :

- $d = 1$: $\frac{I_T}{T^{3/2}} \xrightarrow{(d)} \gamma_1$, where γ_1 is the intersection local time of a Brownian motion.
- $d = 2$: $\frac{I_T - E[I_T]}{T} \xrightarrow{(d)} \gamma_1'$, where γ_1' is the renormalized intersection local time of a Brownian motion.
- $d \geq 3$: $\frac{I_T - E[I_T]}{\sqrt{\mathrm{Var}(I_T)}} \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0, 1)$.

Since the law of large numbers and limit laws have been established, it is natural to be interested in the large deviations of the SILT.

The large deviations are the study of rare events. In this article we wonder how I_T can exceed its mean, i.e. we compute the probability $P(I_T \geq b_T^q)$ where $b_T^q \gg E[I_T]$. Heuristically, it is interesting to ask how the walk can realize this kind of atypical event. We propose here a classical strategy for the walk to realize large deviations of its SILT.

Let us localize the walk on a ball of radius R up to time τ. As μ is in the domain of attraction of a stable law, there exists $(U_t, t \geq 0)$ a non degenerate stable process such that $\frac{1}{a(t)} X_t \longrightarrow U_1$, where $a(t) \sim t^{\frac{1}{\alpha}}$. On one hand, the walk arrives at the edge of the ball in R^α units of time and the probability of this localization is about $\exp(-\frac{\tau}{R^\alpha})$. On the other hand, the walk spends about $\frac{\tau}{R^d}$ units of time on each site of the ball, so I_T increases to $\left(\frac{\tau}{R^d}\right)^q R^d = \tau^q R^{d(1-q)}$. We want $I_T = b_T^q$, which gives $\tau = b_T R^{\frac{d(q-1)}{q}}$. Thus the probability of this localization is about $\exp\left(-b_T R^{\frac{d(q-1)}{q} - \alpha}\right)$. Maximizing this quantity in R, we obtain three cases :

- $\frac{d(q-1)}{q} - \alpha > 0 \Leftrightarrow q(d - \alpha) > d$ (supercritical case) : in this case the optimal choice for R is 1. A good strategy to realize the large deviations is to spend a time of order b_T in a ball of radius 1, and then : $P(I_T \geq b_T^q) \sim \exp(-b_T)$.
- $\frac{d(q-1)}{q} - \alpha = 0 \Leftrightarrow q(d - \alpha) = d$ (critical case) : here the choice of R does not matter. Every strategy consisting in spending a time of order $b_T R^{\frac{d(q-1)}{q}}$ in a ball of radius R such that $1 \leq R \ll (T/b_T)^{1/\alpha}$ is a good strategy, so $P(I_T \geq b_T^q) \sim \exp(-b_T)$.

– $\frac{d(q-1)}{q} - \alpha < 0 \Leftrightarrow q(d-\alpha) < d$ (subcritical case) : a good strategy is to stay up to time T in a ball of maximal radius, i.e. $\left(\frac{T}{b_T}\right)^{\frac{q}{d(q-1)}}$, thus $P(I_T \geq b_T^q) \sim \exp\left(-b_T \left(\frac{b_T}{T}\right)^{\frac{\alpha q}{d(q-1)}-1}\right)$.

The question of large deviations for the SILT of random walk has very studied in recent years. The knowledge of the case $\alpha = 2$ is the most progressed. We make here a brief review of these results.

– For $d = 1$, Chen and Li obtain a large deviations principle in [**CL04**], as they obtain similar results for Brownian motion.
– For a large deviations principle in the case $d = 2$, we refer to the work of Bass, Chen and Rosen [**BCR06**]. They express the constant in term of the best possible constant in a Gagliardo-Nirenberg inequality.
– In [**Che10**], Chen obtains a large deviations principle for all the scales of deviations for $d = 3$ and $q = 2$. For dimension 2 and 3, the main idea is to first establish the large deviations of q independent random walk then to use the dyadic decomposition due to Westwater [**Wes80**].
– In the critical dimension $d = 4$, a recent paper of Castell [**Cas10**] states a large deviations principle, the constant being given in term of the best possible constant in a Gagliardo-Nirenberg inequality.
– The case of the supercritical dimension $d \geq 5$ is treated in two papers. In [**CM09**], Chen and Mörters give a large deviations principle concerning mutual intersection local times of q independent random walks in infinite time horizon, and Asselah obtains in [**Ass09**] a large deviations principle for the SILT of a symmetric random walk. The method used by Castell in [**Cas10**] and by Chen and Mörters in [**CM09**] have the same idea at their core. Indeed, Chen and Mörters explicitely compute large moments of the intersection local time and Castell uses Einsenbaum's Theorem, whose proof is based on the computation of its large moments.

A recent book of Chen [**Che10**] summarizes these results. We refer the interested reader to this work for a precise development of the subject.

In this article, we are interested in the case where $\alpha < 2$, i.e. the α-stable random walk. Up to now only subcritical case $q(d-\alpha) < d$ is solved in three papers, [**BCR05**],[**CLR05**] and [**CR05**]. In these three articles the authors obtain some large deviations principle, and give the constant in terms of the best possible constant in a Gagliardo-Nirenberg inequality. We briefly present these results.

– The case $\alpha > d$ (note that imply $d = 1$) is solved by Chen, Li and Rosen in [**CLR05**]. They obtain a large deviations principle for the SILT.
– The case $\alpha \leq d$ is studied in two articles. Bass, Chen and Rosen explore the specific case $p = 2$ and $\alpha \in]\frac{2d}{3}, d]$ in [**BCR05**]. They show a large deviation principle for the SILT. The idea of the proof is to first study the intersection of two independent random processes, then to use the dyadic decomposition due to Westwater.

– To complete the picture in the case $q(d-\alpha) < d$, Chen and Rosen [**CR05**] obtain a large deviations principle for intersection of q independent stable processes using Feynman-Kac type large deviations.

This article contributes to the question of large deviations for the self-intersection local times. We get a large deviations principle in the critical and supercritical case (i.e. $q(d-\alpha) \geq d$). In this situation the local times of the α-stable process do not exist and we have to consider the SILT of the random walk itself. We point out that our method allows us to consider the q-fold self intersection local times even if q is a real number instead of q is an integer. Moreover, denote by Q_T the mutual intersection of q independent random walks $(X_t^{(i)}, t \geq 0, 1 \leq i \leq q)$ defined by

$$Q_T = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \prod_{i=1}^{q} l_T^{(i)}(x) = \int_0^T \cdots \int_0^T \mathbb{I}_{X_{s_1}^{(1)} = \cdots = X_{s_q}^{(q)}} ds_1 \cdots ds_q.$$

The upper bound of the large deviations principle for the SILT leads to an upper bound of large deviations for Q_T by the following inequality :

$$Q_T^{1/q} = \left(\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \prod_{i=1}^{q} l_T^{(i)}(x) \right)^{1/q} \leq \left(\prod_{i=1}^{q} \left\| l_T^{(i)} \right\|_q \right)^{1/q} \leq \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{q} \left\| l_T^{(i)} \right\|_q .$$

As $q(d-\alpha) \geq d$ we have $\alpha < d$, which implies that the walk is transient. So $l_T(x) \sim 1$ and $I_T \sim T$ but of course $I_T \leq T^q$. Therefore we focus on the probability $P(I_T \geq b_T^q)$ for $T \gg b_T \gg T^{\frac{1}{q}}$.

1.0.2.2. Main results.

Let G be the Green function of the random walk $(X_t, t \geq 0)$ defined by :

$$G(x,y) = E_x \left[\int_0^{+\infty} \mathbb{I}_{X_t = y} \, dt \right], \forall x, y \in \mathbb{Z}^d.$$

Remark that as we have $\alpha < d$, the walk is transient, which gives that the Green function does exist. We use the following notations :

$$\rho(q) = \sup_g \left\{ < g, Gg >, \text{ supp(g) compact}, \ \|g\|_{(2q)'} = 1 \right\},$$

$$\kappa(q) = \inf_f \left\{ \frac{< f, -Af >}{\|f\|_{2q}^2}, \ \|f\|_2 = 1 \right\}$$

where $< \cdot, \cdot >$ is the classical scalar product on $l^2(\mathbb{Z}^d)$ and $Gg(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} G(x-y)g(y)$.

Proposition 1.1. *Under assumption 1, if $q(d-\alpha) \geq d$, then $\kappa(q)$ is a non-degenerate constant and $\kappa(q) = \frac{1}{\rho(q)}$.*

Théorème 1.2. **Large deviations.**

Assume that $q(d-\alpha) \geq d$ and $T \gg b_T \gg T^{\frac{1}{q}}$. Under assumption 1, we have :

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{b_T} \log P\left[I_T \geq b_T^q\right] = -\frac{1}{\rho(q)} . \tag{28}$$

1.0.2.3. Sketch of the proof.

The proof of the lower bound of large deviations (Theorem 4.1) is classical. Let $\mathcal{F}$ be the set of the probability measures on $\mathbb{Z}^d$ endowed by the weak topology of probability measures. Donsker and Varadhan have proved a restricted large deviation principle for $\frac{l_T}{T}$ in $\mathcal{F}$ with rate function $\mathcal{J}(\nu) =< \sqrt{\nu}, -A\sqrt{\nu} >$. Then the lower bound of the large deviations with constant $\kappa(q)$ follows from the lower semicontinuity of the function

$$\nu \in \mathcal{F} \mapsto \|\nu\|_q = \sup_{f; \|f\|_{q'}=1} \left\{ \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \nu(x) f(x) \right\}.$$

However the large deviations principle for $\frac{l_T}{T}$ being restricted, that is the upper bound is only true on compact sets, we cannot use it for the upper bound. The method used here for the upper bound has been recently developed by Castell in [**Cas10**]. The main idea is to use Eisenbaum's theorem to shift the problem from a symmetric Markov process to a Gaussian process, which is considerably more convenient. Indeed, this theorem relates the law of the local times of a symmetric Markov process stopped at an exponential time with the square of a Gaussian process, whose covariance is given by the Green kernel of the stopped Markov process.

First we compare the SILT of the random walk with the SILT of the random walk projected on the torus, and stopped at an exponential time of parameter λ independent of the walk (lemma 3.2). Then we apply Eisenbaum's theorem (theorem 3.3) to arrive at the Gaussian process $(Z_x, x \in \mathbb{T}_R)$ whose covariance is given by $G_{R,\lambda}(x, y) = E_x \left[\int_0^\tau \delta_y(X_s^{(R)})\, ds \right]$ (lemma 3.4 and 3.5). In lemmas 3.4 and 3.5 we work on the Gaussian process $(Z_x, x \in \mathbb{T}_R)$ using concentration inequalites for norms of Gaussian processes. We let space and time going together to infinity to obtain a first upper bound with a constant $-1/\rho_1$.

We finish the proof of the upper bound by proving in proposition 5.1 that $\rho_1 \leq \rho(q)$. The estimates of the transition probability of an α-stable random walk obtained by Bass and Levin in [**BL02**] are a key of its proof. We assume assumption 1 because Bass and Levin need it to obtain these estimates. The upper bound in this assumption is not surprising since the increments of the walk have moments of order α. However, the lower bound is less natural since it imposes the walk to jump of arbitrary distance in $\mathbb{Z}^d$. Current results concerning estimates of transition probabilities for α-stable processes require this kind of assumption. We think that this assumption is not necessary to obtain large deviations of the SILT, and it would be interesting to do without it.

Letting R and T go to infinity together ask the question of scale between λ, R and T. As we stop the random walk at an exponential time τ of parameter λ, we must control the quantity $\frac{1}{b_T} \log P(\tau \geq T) = \frac{\lambda T}{b_T}$. That's why we define λ as $a\frac{b_T}{T}$. Additionally, the Eisenbaum's theorem shift the problem from the l_q-norm of the local time l_T to the $l_{2q,R}$-norm of the Gaussian process $(Z_x, x \in \mathbb{T}_R)$. Since $\|Z\|^2_{2q,R} \sim R^{d/q}$ we have the extra constraint $b_T \geq R^{d/q}$. Those two precedent conditions, combined with the condition $\lambda R^{d/q'} \gg 1$ coming from proposition 5.1, imply that $b_T^q \gg T$. That's why the proof does not work at the scale of the mean $b_T \sim T^{1/q}$.

Next, we have to equalize the lower and upper bound, which is equivalent to prove $\kappa(q) = 1/\rho(q)$. This is done in proposition 5.3 where we use some techniques of Chen and Mörters from [**CM09**].

Finally it remains to prove that our constants $\kappa(q)$ and $\rho(q)$ are not degenerate, which is done in proposition 5.2. We want to point out that in the supercritical case it is not difficult to prove that $\rho(q)$ is finite. Indeed, from the results of Le Gall and Rosen [**LGR91**], we know that $G(0,x) = O(|x|^{\alpha-d})$, which implies that $\|G\|_q$ is finite in the supercritical case $q(d-\alpha) > d$. These estimates cannot answer the question when $q(d-\alpha) = d$. So we had to work on $\kappa(q)$ and the underlying Sobolev's inequalities. The solution comes on one hand, from a work of Varopoulos [**Var85**] which relates Sobolev's inequalities and estimates of the probability transition, and on the other hand, from estimates of the probability transition obtained thanks to the work of Bass and Levin [**BL02**].

This article is organized as follows. Section 2 is devoted to the proofs of two preliminary lemmas, giving some informations on the Green function. We prove a first upper bound in section 3 and give in section 4 the demonstration of the lower bound. Finally in section 5 we end the proof of the upper bound by proving that the constant is not degenerate and equalizing the bounds.

2. Around the Green function

In this section we prove some preliminary results about the Green function which will be used throughout this article.

Set $G_{R,\lambda}$ the Green function of the walk $(X_t, t \geq 0)$ projected on the torus $\mathbb{T}_R$ and stopped at an exponential time τ of parameter λ independent of the random walk. We use the same notation x for $x \in \mathbb{T}_R$ and for its representant in $[0, R[^d$.

Lemme 2.1. *Under assumption 1, there exists a constant C such that $\forall \lambda, R > 0, \forall x, y \in [0, R]^d$:*

$$G_{R,\lambda}(x,y) \leq G(x,y) + \frac{C}{\lambda R^d}. \tag{29}$$

Démonstration. Let $p_t^R(x,y)$ be the transition probability of $X_t^{(R)}$ the random walk X_t projected on the torus $\mathbb{T}_R$, hence

$$G_{R,\lambda}(x,y) = \mathbb{E}_x\left[\int_0^\tau \mathbb{1}_{X_s^R = y} ds\right] = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) p_t^R(x,y) dt.$$

By Theorem 1.1 in [**BL02**], there exists a constant C such that

$$\forall t \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{Z}^d, p_t(x,y) \leq C\left(t^{-d/\alpha} \wedge \frac{t}{|x-y|^{d+\alpha}}\right).$$

Using the change of variable $z = \xi - \frac{x-y}{R}$ we have, $\forall x, y \in [0,R]^d$:

$$\begin{aligned}
p_t^R(x,y) &= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^d} p_t(x, y+R\xi) \\
&\leq p_t(x,y) + C \sum_{\substack{z\neq 0 \\ |z|\leq \frac{t^{1/\alpha}}{R}}} \frac{1}{t^{d/\alpha}} + C \sum_{|z|>\frac{t^{1/\alpha}}{R}} \frac{t}{(R|z|)^{d+\alpha}} \\
&\leq p_t(x,y) + \frac{C}{R^d} + C \sum_{|z|>\frac{t^{1/\alpha}}{R}} \frac{t}{(R|z|)^{d+\alpha}}.
\end{aligned}$$

Consequently for $L > 1$ we have :

$$\begin{aligned}
G_{R,\lambda}(x,y) \leq & \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) p_t(x,y)dt + \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda t) \left(\frac{C}{R^d} + C \sum_{|z|>\frac{t^{1/\alpha}}{R}} \frac{t}{(R|z|)^{d+\alpha}} \right) dt \\
\leq & G(x,y) + \frac{C}{\lambda R^d} + C\int_0^{+\infty} \frac{t\exp(-\lambda t)}{R^{d+\alpha}} \sum_{|z|>\frac{t^{1/\alpha}}{R}} \frac{1}{|z|^{d+\alpha}} dt \\
= & G(x,y) + \frac{C}{\lambda R^d} + C\int_0^{LR^\alpha} \frac{t\exp(-\lambda t)}{R^{d+\alpha}} \sum_{|z|>\frac{t^{1/\alpha}}{R}} \frac{1}{|z|^{d+\alpha}} dt \\
& + C\int_{LR^\alpha}^{+\infty} \frac{t\exp(-\lambda t)}{R^{d+\alpha}} \sum_{|z|>\frac{t^{1/\alpha}}{R}} \frac{1}{|z|^{d+\alpha}} dt. \qquad (30)
\end{aligned}$$

Let us find an upper bound for the first integral in (30). Using the fact that the function $x \to \frac{1-\exp(-x)}{x}$ is bounded on $\mathbb{R}^+$ we obtain :

$$\begin{aligned}
\int_0^{LR^\alpha} \frac{t\exp(-\lambda t)}{R^{d+\alpha}} \sum_{|z|>\frac{t^{1/\alpha}}{R}} \frac{1}{|z|^{d+\alpha}} dt &\leq \sum_{|z|>0} \frac{1}{|z|^{d+\alpha}} \int_0^{LR^\alpha} \frac{t\exp(-\lambda t)}{R^{d+\alpha}} dt \\
&\leq C \frac{1-\exp(-\lambda L R^\alpha)}{\lambda^2 R^{d+\alpha}} \leq \frac{C}{\lambda R^d}. \qquad (31)
\end{aligned}$$

We work now on the second integral in (30) :

$$\begin{aligned}
\int_{LR^\alpha}^{+\infty} \frac{t\exp(-\lambda t)}{R^{d+\alpha}} \sum_{|z|>\frac{t^{1/\alpha}}{R}} \frac{1}{|z|^{d+\alpha}} dt &\leq C \int_{LR^\alpha}^{+\infty} \frac{t\exp(-\lambda t)}{R^{d+\alpha}} \sum_{k>\frac{t^{1/\alpha}}{R}} \frac{1}{k^{1+\alpha}} dt \\
&\leq C \int_{LR^\alpha}^{+\infty} \frac{t\exp(-\lambda t)}{R^{d+\alpha}} \frac{1}{\left(\frac{t^{1/\alpha}}{R} - 1\right)^\alpha} dt \\
&= C \int_{LR^\alpha}^{+\infty} \frac{t\exp(-\lambda t)}{R^{d}} \frac{1}{(t^{1/\alpha} - R)^\alpha} dt.
\end{aligned}$$

Since $t \geq LR^\alpha$, we have $t^{1/\alpha} - R \geq t^{1/\alpha}(1 - L^{-1/\alpha})$, then :

$$\begin{aligned}\int_{LR^\alpha}^{+\infty} \frac{t\exp(-\lambda t)}{R^{d+\alpha}} \sum_{|z|>\frac{t^{1/\alpha}}{R}} \frac{1}{|z|^{d+\alpha}} dt &\leq C \int_{LR^\alpha}^{+\infty} \frac{\exp(-\lambda t)}{R^d(1-L^{-1/\alpha})^\alpha} dt \\ &\leq C \frac{\exp(-L\lambda R^\alpha)}{\lambda R^d(1-L^{-1/\alpha})^\alpha} \leq \frac{C}{\lambda R^d}. \qquad (32)\end{aligned}$$

Gathering (30),(31) and (32) we obtain :

$$G_{R,\lambda}(x,y) \leq G(x,y) + \frac{C}{\lambda R^d}.$$

□

LEMME 2.2. *Assume that λ and R depend on T in such a way that $\lambda \ll 1$ and $\lambda R^d \gg 1$. Under assumption 1, we have :*

$$\lim_{T\to+\infty} G_{R,\lambda}(0,0) = G(0,0). \qquad (33)$$

DÉMONSTRATION. On one hand, by lemma 2.1 there exists a constant C such that $\forall \lambda, R > 0$, $G_{R,\lambda}(0,0) \leq G(0,0) + \frac{C}{\lambda R^d}$. Hence with $\lambda R^d \gg 1$ we have :

$$\limsup_{T\to+\infty} G_{R,\lambda}(0,0) \leq G(0,0).$$

On the other hand let $S > 0$. Using the fact that $1 \geq p_t^R(0,0) \geq p_t(0,0)$ and $\exp(-\lambda t) \leq 1$ for $t \geq 0$, we deduce :

$$\begin{aligned}\int_0^S \exp(-\lambda t) p_t^R(0,0)\, dt &= \int_0^S p_t^R(0,0) + (\exp(-\lambda t) - 1) p_t^R(0,0) dt \\ &\geq \int_0^S p_t(0,0)\, dt - \int_0^S (1 - \exp(-\lambda t))\, dt \\ &= \int_0^S p_t(0,0)\, dt + \frac{\exp(-\lambda S) - 1 + \lambda S}{\lambda}.\end{aligned}$$

If S is chosen so that $S \gg 1$ and $\frac{1}{\lambda}(\exp(-\lambda S) - 1 + \lambda S) \ll 1$, then we have :

$$\liminf_{T\to\infty} G_{R,\lambda}(0,0) \geq \liminf_{T\to\infty} \int_0^S \exp(-\lambda t) p_t^R(0,0)\, dt \geq \int_0^\infty p_t(0,0)\, dt := G(0,0). \qquad (34)$$

Using Taylor series conditions, $S \gg 1$ and $\lambda S^2 \ll 1$ are sufficient. These conditions are compatible because $\lambda \to 0$. So, for a such choice of S, we have :

$$\liminf_{T\to\infty} G_{R,\lambda}(0,0) \geq G(0,0).$$

□

3. Upper bound

In this section we obtain a first upper bound for the large deviations of I_T which is given in theorem 3.1.

THÉORÈME 3.1. *Assume that $q(d-\alpha) \geq d$ and that we are under assumption 1. For all $a > 0$ we define the parameter λ of the exponential time τ by $\lambda = a\frac{b_T}{T}$. Moreover, assume that λ, R and b_T depend on T in such a way that $\lambda R^d \gg 1$, $b_T \gg R^{d/q}$ and $\log(T) \ll b_T \ll T$. Then we define*

$$\rho_1(a) = \limsup_{T\to\infty} \rho_1(a,R,T) \text{ and } \rho_1 = \limsup_{a\to 0} \rho_1(a),$$

where $\rho_1(a,R,T) := \sup\left\{ \sum_{x,y\in\mathbb{T}_R} f(x)G_{R,\lambda}(x,y)f(y)\,;\ f \text{ such that } \|f\|_{(2q)',R} = 1 \right\}$, *and we have :*

$$\limsup_{T\to+\infty} \frac{1}{b_T} \log P\left[I_T \geq b_T^q\right] \leq -\frac{1}{\rho_1}.$$

The method of the proof is similar to the one developed by Castell in [**Cas10**]. We give it for the sake of completeness.

3.1. Step 1 : comparison with the SILT of the random walk on the torus stopped at an exponential time.

LEMME 3.2. *Let τ be the exponential time defined in theorem 3.1. Let $l_\tau^{(R)}(x) = \int_0^\tau \delta_x(X_s^{(R)})\,ds$ and $I_{R,\tau} = \sum_{x\in\mathbb{T}_R}(l_\tau^{(R)}(x))^q$. Then $\forall a,R,T > 0$:*

$$P\left[I_T \geq b_T^q\right] \leq e^{ab_T} P\left[I_{R,\tau} \geq b_T^q\right].$$

DÉMONSTRATION. We deduce by convexity that

$$\begin{aligned} I_T = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} l_T^q(x) &= \sum_{x\in\mathbb{T}_R}\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} l_T^q(x+kR) \\ &\leq \sum_{x\in\mathbb{T}_R}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} l_T(x+kR)\right)^q = \sum_{x\in\mathbb{T}_R} l_{R,T}^q(x) = I_{R,T}. \end{aligned}$$

Then using the fact that $\tau \sim \epsilon(\lambda)$ independent of $(X_s, s\geq 0)$ with $\lambda = a\frac{b_T}{T}$, we get :

$$\begin{aligned} P\left[I_T \geq b_T^q\right]\exp\left(-ab_T\right) &\leq P\left[I_{R,T} \geq b_T^q\right] P(\tau \geq T) \\ &\leq \mathbb{P}\left[I_{R,T} \geq b_T^q, \tau \geq T\right] \\ &\leq P\left[I_{R,\tau} \geq b_T^q\right]. \end{aligned}$$

Finally, $P\left[I_T \geq b_T^q\right] \leq e^{ab_T} P\left[I_{R,\tau} \geq b_T^q\right]$.

□

3.2. Step 2 : the Eisenbaum isomorphism theorem. We use here the following theorem due to Eisenbaum given by corollary 8.1.2 page 364 in [**MR06**].

THÉORÈME 3.3. *(Eisenbaum) Let τ be as in theorem 3.1 and let $(Z_x, x \in \mathbb{T}_R)$ be a centered Gaussian process with covariance matrix $G_{R,\lambda}$ independent of τ and of the random walk $(X_s, s \geq 0)$. For $s \neq 0$, consider the process $S_x := l_{R,\tau}(x) + \frac{1}{2}(Z_x+s)^2$. Then for all measurable and bounded function $F : \mathbb{R}^{\mathbb{T}_R} \mapsto \mathbb{R}$:*

$$E\left[F((S_x; x \in \mathbb{T}_R))\right] = E\left[F\left((\frac{1}{2}(Z_x+s)^2; x \in \mathbb{T}_R)\right)\left(1+\frac{Z_0}{s}\right)\right].$$

3.3. Step 3 : Comparison between $I_{R,\tau}$ and $\|Z\|_{2q,R}$.

LEMME 3.4. *Let τ and $(Z_x, x \in \mathbb{T}_R)$ be defined as in theorem 3.3. $\forall \epsilon > 0$, there exists a constant $C(\epsilon) \in]0;\infty[$ depending only on ϵ such that $\forall a, \gamma, R, T > 0$:*

$$P\left[I_{R,\tau} \geq b_T^q\right] \leq C(\epsilon)\exp\left(-\gamma b_T(1+\circ(\epsilon))\right)\left(1+\frac{R^{\frac{d}{2q}}\sqrt{T}}{\epsilon b_T\sqrt{2a\epsilon}}\right)\frac{E\left[\exp\left(\frac{\gamma}{2}\|Z\|_{2q,R}^2\right)\right]^{\frac{1}{1+\epsilon}}}{P\left[\|Z\|_{2q,R} \geq 2\sqrt{2b_T\epsilon}\right]}$$

where $\|\cdot\|_{2q,R}$ is the l_{2q}-norm of functions on $\mathbb{T}_R$.

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned} S_x := l_{R,\tau}(x) + \frac{1}{2}(Z_x+s)^2 \Rightarrow S_x^q \geq l_{R,\tau}^q(x) + \left(\frac{1}{2}(Z_x+s)^2\right)^q \\ \Rightarrow \sum_{x\in\mathbb{T}_R} S_x^q \geq I_{R,\tau} + \sum_{x\in\mathbb{T}_R}\frac{1}{2^q}(Z_x+s)^{2q}. \end{aligned}$$

By independence of $(Z_x, x \in \mathbb{T}_R)$ with the random walk $(X_s, s \geq 0)$ and the exponential time τ, we have $\forall \epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} P\left(I_{R,\tau} \geq b_T^q\right) P\left(\sum_{x\in\mathbb{T}_R}\frac{1}{2^q}(Z_x+s)^{2q} \geq b_T^q\epsilon^q\right) =& P\left(I_{R,\tau} \geq b_T^q, \sum_{x\in\mathbb{T}_R}\frac{1}{2^q}(Z_x+s)^{2q} \geq b_T^q\epsilon^q\right) \\ \leq& P\left(I_{R,\tau} + \sum_{x\in\mathbb{T}_R}\frac{1}{2^q}(Z_x+s)^{2q} \geq b_T^q(1+\epsilon^q)\right) \\ =& P\left(\sum_{x\in\mathbb{T}_R} l_{R,\tau}(x)^q + \frac{1}{2^q}(Z_x+s)^{2q} \geq b_T^q(1+\epsilon^q)\right) \\ \leq& P\left(\sum_{x\in\mathbb{T}_R} S_x^q \geq b_T^q(1+\epsilon^q)\right) \\ =& E\left[\left(1+\frac{Z_0}{s}\right) \mathbb{I}_{\sum_{x\in\mathbb{T}_R}\frac{1}{2^q}(Z_x+s)^{2q} \geq b_T^q(1+\epsilon^q)}\right], \end{aligned} \tag{35}$$

where the last equality comes from Theorem 3.3. Moreover by Markov inequality, $\forall \gamma > 0$,

$$\begin{aligned}
&E\left[\left(1+\frac{Z_0}{s}\right)\ \mathbb{1}_{\sum_{x\in\mathbb{T}_R}\frac{1}{2^q}(Z_x+s)^{2q}\geq b_T^q(1+\epsilon^q)}\right]\\
\leq &\exp(-\gamma b_T(1+\epsilon^q)^{\frac{1}{q}})E\left[\left(1+\frac{Z_0}{s}\right)\exp\left(\gamma\left(\sum_{x\in\mathbb{T}_R}\frac{1}{2^q}(Z_x+s)^{2q}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right]. \qquad (36)
\end{aligned}$$

Combining (35) and (36), we obtain that $\forall a,\gamma,\epsilon>0$,

$$P\left(I_{R,\tau}\geq b_T^q\right)\leq \exp(-\gamma b_T(1+\epsilon^q)^{\frac{1}{q}})\frac{E\left[\left(1+\frac{Z_0}{s}\right)\exp\left(\frac{\gamma}{2}\|Z+s\|_{2q,R}^2\right)\right]}{P(\|Z+s\|_{2q,R}\geq\sqrt{2b_T\epsilon})}. \qquad (37)$$

Let us bound $P(\|Z+s\|_{2q,R}\geq\sqrt{2b_T\epsilon})$ from below. Since $\|Z+s\|_{2q,R}\geq\|Z\|_{2q,R}-\|s\|_{2q,R}$ and $\|s\|_{2q,R}=sR^{\frac{d}{2q}}$, we have

$$P(\|Z+s\|_{2q,R}\geq\sqrt{2b_T\epsilon})\geq P(\|Z\|_{2q,R}\geq\sqrt{2b_T\epsilon}+sR^{\frac{d}{2q}}). \qquad (38)$$

Then we look for an upper bound of the expectation in (37). Using the fact that $\forall\epsilon>0,\ (a+b)^2\leq(1+\epsilon)a^2+(1+\frac{1}{\epsilon})b^2$ and Hölder's inequality, we obtain that $\forall\epsilon>0$,

$$\begin{aligned}
&E\left[\left(1+\frac{Z_0}{s}\right)\exp\left(\frac{\gamma}{2}\|Z+s\|_{2q,R}^2\right)\right]\\
\leq &E\left[\left(1+\frac{Z_0}{s}\right)\exp\left(\frac{\gamma}{2}\left((1+\epsilon)\|Z\|_{2q,R}^2+(1+\frac{1}{\epsilon})s^2R^{\frac{d}{q}}\right)\right)\right]\\
\leq &E\left[\left|1+\frac{Z_0}{s}\right|^{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}}\right]^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}}E\left[\exp\left(\frac{\gamma}{2}(1+\epsilon)^2\|Z\|_{2q,R}^2\right)\right]^{\frac{1}{1+\epsilon}}\exp\left(\frac{\gamma}{2}\frac{1+\epsilon}{\epsilon}s^2R^{d/q}\right)\\
\leq &C(\epsilon)\left(1+\frac{1}{s\sqrt{\lambda}}\right)E\left[\exp\left(\frac{\gamma}{2}(1+\epsilon)^2\|Z\|_{2q,R}^2\right)\right]^{\frac{1}{1+\epsilon}}\exp\left(\frac{\gamma}{2}\frac{1+\epsilon}{\epsilon}s^2R^{d/q}\right), \qquad (39)
\end{aligned}$$

where the last inequality comes from the fact that $Var(Z_0)=G_{R,\lambda}(0,0)\leq E[\tau]=\frac{1}{\lambda}$. We deduce from (37), (38) and (39) that $\forall\epsilon,a,\theta>0$,

$$\begin{aligned}
&P\left(I_{R,\tau}\geq b_T^q\right)\\
\leq &C(\epsilon)\exp\left(-\gamma b_T(1+\epsilon^q)^{\frac{1}{q}}\right)\left(1+\frac{1}{s\sqrt{\lambda}}\right)\frac{E\left[\exp\left(\frac{\gamma}{2}(1+\epsilon)^2\|Z\|_{2q,R}^2\right)\right]^{\frac{1}{1+\epsilon}}}{P(\|Z\|_{2q,R}\geq\sqrt{2b_T\epsilon}+sR^{\frac{d}{2q}})}\exp\left(\frac{\gamma}{2}\frac{1+\epsilon}{\epsilon}s^2R^{d/q}\right).
\end{aligned}$$

The choice of s being free, we choose $s=\frac{\epsilon\sqrt{2b_T\epsilon}}{R^{\frac{d}{2q}}}$. Remember that $\lambda=\frac{ab_T}{T}$ and make the change of variable $\gamma=\frac{\gamma'}{(1+\epsilon)^2}$. We have $\forall\gamma',a,\epsilon>0$,

$$\begin{aligned}
&P\left(I_{R,\tau}\geq b_T^q\right)\\
\leq &C(\epsilon)\exp\left(-\gamma' b_T\frac{(1+\epsilon^q)^{\frac{1}{q}}}{(1+\epsilon)^2}\right)\left(1+\frac{R^{\frac{d}{2q}}\sqrt{T}}{\epsilon b_T\sqrt{2a\epsilon}}\right)\frac{E\left[\exp\left(\frac{\gamma'}{2}\|Z\|_{2q,R}^2\right)\right]^{\frac{1}{1+\epsilon}}}{P\left[\|Z\|_{2q,R}\geq 2\sqrt{2b_T\epsilon}\right]}\exp\left(\frac{\epsilon^2\gamma' b_T}{1+\epsilon}\right).
\end{aligned}$$

□

3.4. Step 4 : Large deviations for $\|Z\|_{2q,R}$.

LEMME 3.5. *Let τ and $(Z_x, x \in \mathbb{T}_R)$ be defined as in theorem 3.3. Let $\rho_1(a,R,T)$ be defined as in Theorem 3.1.*

(1) $\forall a, R, T > 0$, $G_{R,\lambda}(0,0) \leq \rho_1(a,R,T) \leq R^{d/q} G_{R,\lambda}(0,0)$.

(2) $\forall a, \epsilon, R, T > 0$,

$$P\left[\|Z\|_{2q,R} \geq \sqrt{b_T\epsilon}\right] \geq \frac{\sqrt{\rho_1(a,R,T)}}{\sqrt{2\pi b_T \epsilon}}\left(1 - \frac{\rho_1(a,R,T)}{b_T\epsilon}\right)\exp\left(-\frac{b_T\epsilon}{2\rho_1(a,R,T)}\right).$$

(3) $\exists\, C(q)$ *such that* $\forall a, R, T, \epsilon > 0$, $\forall \gamma$ *such that* $\gamma(1+\epsilon) < \frac{1}{\rho_1(a,R,T)}$,

$$E\left[\exp\left(\frac{\gamma}{2}\|Z\|^2_{2q,R}\right)\right] \leq \frac{2}{\sqrt{1-\gamma(1+\epsilon)\rho_1(a,R,T)}}\exp\left(C(q)\gamma\frac{1+\epsilon}{\epsilon}R^{d/q}G_{R,\lambda}(0,0)\right).$$

DÉMONSTRATION. (1) For the lower bound, let take $f = \delta_0 : \rho_1(a,R,T) \geq G_{R,\lambda}(0,0)$.
For the upper bound,

$$\begin{aligned}\rho_1(a,R,T) &= \sup\left\{\sum_{x,y\in\mathbb{T}_R} f_x G_{R,\lambda}(x,y) f_y \,;\, f \text{ such that } \|f\|_{(2q)',R} = 1\right\}\\ &\leq \sup_{x,y\in\mathbb{T}_R} G_{R,\lambda}(x,y)\sup\left\{\|f\|^2_{1,R} \,;\, f \text{ such that } \|f\|_{(2q)',R} = 1\right\}.\end{aligned}$$

On one hand, $\|f\|_{1,R} \leq \|f\|_{(2q)',R}\|1\|_{2q,R} = R^{d/2q}$. On the other hand, denote by T_x the first time where the walk is at state x. Then,

$$\begin{aligned}\sup_{x,y\in\mathbb{T}_R} G_{R,\lambda}(x,y) &= \sup_{x\in\mathbb{T}_R} G_{R,\lambda}(0,x) = \sup_{x\in\mathbb{T}_R} E_0[l^R_\tau(x)]\\ &\leq \sup_{x\in\mathbb{T}_R} E_0[E_x[l^R_\tau(x)]\ \mathbb{1}_{T_x\leq\tau}] = \sup_{x\in\mathbb{T}_R} G_{R,\lambda}(x,x)P_0(T_x \leq \tau)\\ &\leq G_{R,\lambda}(0,0).\end{aligned}$$

(2) By Hölder's inequality, $\forall f$ such that $\|f\|_{(2q)',R} = 1$

$$P\left[\|Z\|_{2q,R} \geq \sqrt{b_T\epsilon}\right] \geq P\left[\sum_{x\in\mathbb{T}_R} f_x Z_x \geq \sqrt{b_T\epsilon}\right].$$

Since $\sum_{x\in\mathbb{T}_R} f_x Z_x$ is a real centered Gaussian variable with variance

$$\sigma^2_{a,R,T}(f) = \sum_{x,y\in\mathbb{T}_R} G_{R,\lambda}(x,y) f_x f_y\,,$$

we have :

$$
\begin{aligned}
P\left[\|Z\|_{2q,R} \geq \sqrt{b_T\epsilon}\right] &\geq \frac{\sigma_{a,R,T}(f)}{\sqrt{2\pi}\sqrt{b_T\epsilon}}\left(1-\frac{\sigma^2_{a,R,T}(f)}{b_T\epsilon}\right)\exp\left(-\frac{b_T\epsilon}{2\sigma^2_{a,R,T}(f)}\right)\\
&\geq \frac{\sigma_{a,R,T}(f)}{\sqrt{2\pi}\sqrt{b_T\epsilon}}\left(1-\frac{\rho_1(a,R,T)}{b_T\epsilon}\right)\exp\left(-\frac{b_T\epsilon}{2\sigma^2_{a,R,T}(f)}\right).
\end{aligned}
$$

Taking the supremum over f we obtain that $\forall a, R, T, \epsilon > 0$,

$$
P\left[\|Z\|_{2q,R} \geq \sqrt{b_T\epsilon}\right] \geq \frac{\sqrt{\rho_1(a,R,T)}}{\sqrt{2\pi b_T\epsilon}}\left(1-\frac{\rho_1(a,R,T)}{b_T\epsilon}\right)\exp\left(-\frac{b_T\epsilon}{2\rho_1(a,R,T)}\right).
$$

(3) Let M be the median of $\|Z\|_{2q,R}$. We can easily see that

$$
E\left[\exp\left(\frac{\gamma}{2}\|Z\|^2_{2q,R}\right)\right] \leq E\left[\exp\left(\frac{\gamma}{2}(1+\epsilon)(\|Z\|_{2q,R}-M)^2\right)\right]\exp(\frac{\gamma}{2}\frac{1+\epsilon}{\epsilon}M^2). \quad (40)
$$

Since $M = (\text{median}(\sum_x Z_x^{2q}))^{1/2q}$ and that for $X \geq 0$, $\text{median}(X) \leq 2E[X]$, we get :

$$
\begin{aligned}
M^2 &= (\text{median}(\sum_x Z_x^{2q}))^{1/q}\\
&\leq (2E[\sum_x Z_x^{2q}])^{1/q}\\
&\leq C(q)(\sum_x G_{R,\lambda}(0,0)^q E[Y^{2q}])^{1/q}, \text{ where } Y \sim \mathcal{N}(0,1)\\
&\leq C(q)R^{d/q}G_{R,\lambda}(0,0)(E[Y^{2q}])^{1/q}\\
&\leq C(q)R^{d/q}G_{R,\lambda}(0,0).
\end{aligned}
$$

Thus,

$$
\exp\left(\frac{\gamma}{2}\frac{1+\epsilon}{\epsilon}M^2\right) \leq \exp\left(\gamma\frac{1+\epsilon}{\epsilon}C(q)R^{d/q}G_{R,\lambda}(0,0)\right). \quad (41)
$$

We find now an upper bound of the expectation in (40). Using concentration inequalities for norms of gaussian processes, $\forall u > 0$,

$$P\left[\left|\|Z\|_{2q,R} - M_{R,T}\right| \geq \sqrt{u}\right] \leq 2P(Y \geq \sqrt{\tfrac{u}{\rho_1(a,R,T)}}) \text{ where } Y \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Then :

$$\begin{aligned}
E & \left[\exp\left(\frac{\gamma}{2}(1+\epsilon)(\|Z\|_{2q,R} - M)^2\right)\right] \\
&= 1 + \int_1^{+\infty} P\left(\exp\left(\frac{\gamma}{2}(1+\epsilon)(\|Z\|_{2q,R} - M)^2\right) \geq u\right) du \\
&= 1 + \int_1^{+\infty} P\left(|\|Z\|_{2q,R} - M| \geq \sqrt{\frac{2\ln(u)}{\gamma(1+\epsilon)}}\right) du \\
&\leq 1 + 2\int_1^{+\infty} P\left(Y^2 \geq \frac{2\ln(u)}{\gamma(1+\epsilon)\rho_1(a,R,T)}\right) du \\
&= -1 + 2E\left[\exp\left(\frac{\gamma(1+\epsilon)\rho_1(a,R,T)}{2} Y^2\right)\right] \\
&= -1 + \frac{2}{\sqrt{1-\gamma(1+\epsilon)\rho_1(a,R,T)}} \leq \frac{2}{\sqrt{1-\gamma(1+\epsilon)\rho_1(a,R,T)}}. \qquad (42)
\end{aligned}$$

Remark that it is only true for γ, ϵ such that $\gamma(1+\epsilon) < \frac{1}{\rho_1(a,R,T)}$. We deduce putting together (40),(41) and (42), that

$$E\left[\exp\left(\frac{\gamma}{2}\|Z\|^2_{2q,R}\right)\right] \leq \frac{2}{\sqrt{1-\gamma(1+\epsilon)\rho_1(a,R,T)}} \exp\left(\gamma\frac{1+\epsilon}{\epsilon}C(q)R^{d/q}G_{R,\lambda}(0,0)\right).$$

□

3.5. Proof of Theorem 3.1.

DÉMONSTRATION. First we remark that if ρ_1 is infinite, then theorem 3.1 is obvious. So we assume now that ρ_1 is finite. Combining Lemma 3.2 and Lemma 3.4 we have proved that : $\forall \epsilon, \gamma, a, R, T > 0$,

$$P[I_T \geq b_T^q] \leq C(\epsilon)\exp(ab_T)\exp(-\gamma b_T(1+\circ(\epsilon)))\left(1 + \frac{R^{\frac{d}{2q}}\sqrt{T}}{\epsilon b_T\sqrt{2a\epsilon}}\right) \frac{E\left[\exp\left(\frac{\gamma}{2}\|Z\|^2_{2q,R}\right)\right]^{\frac{1}{1+\epsilon}}}{P\left[\|Z\|_{2q,R} \geq 2\sqrt{2b_T\epsilon}\right]}. \qquad (43)$$

First, lemma 3.5 gives that $\forall \gamma$ such that $\gamma(1+\epsilon) < \frac{1}{\rho_1(a,R,T)}$,

$$E\left[\exp\left(\tfrac{\gamma}{2}\|Z\|^2_{2q,R}\right)\right]^{\frac{1}{1+\epsilon}} \leq \exp(\tfrac{\gamma}{\epsilon}C(q)R^{d/q}G_{R,\lambda}(0,0))\left(\frac{2}{\sqrt{1-\gamma(1+\epsilon)\rho_1(a,R,T)}}\right)^{\frac{1}{1+\epsilon}}.$$

Since ρ_1 is finite, for a little enough, $1/\rho_1(a) > 0$ and we can choose γ such that $0 < \gamma < \frac{1}{\rho_1(a)}$. Then it is possible to choose $\epsilon > 0$ such that $\gamma(1+2\epsilon) < \frac{1}{\rho_1(a)}$. Hence for T sufficiently large $\frac{1}{\rho_1(a,R,T)} > \gamma(1+2\epsilon)$, then it follows that

$$E\left[\exp\left(\tfrac{\gamma}{2}\|Z\|^2_{2q,R}\right)\right]^{\frac{1}{1+\epsilon}} \leq \exp(\tfrac{\gamma}{\epsilon}C(q)R^{d/q}G_{R,\lambda}(0,0))\left(2\sqrt{\tfrac{1+2\epsilon}{\epsilon}}\right)^{\frac{1}{1+\epsilon}}.$$

We recall that we have assumed that λ and R depend on T in such a way that $\lambda R^d \gg 1$ and $\lambda \ll 1$, which implies that we are in conditions of application of

Lemma 2.2. So we know that $G_{R,\lambda(0,0)} \to G(0,0)$. Moreover we have assumed that $b_T \gg R^{\frac{d}{q}}$, therefore we have :

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{b_T} \log E\left[\exp\left(\frac{\gamma}{2}\left\|Z\right\|_{2q,R}^2\right)\right]^{\frac{1}{1+\epsilon}} = 0. \tag{44}$$

Then we work on the probability $P\left[\left\|Z\right\|_{2q,R} \geq \sqrt{8b_T\epsilon}\right]$ in (43).
In the same way that previously we use $\rho_1(a,R,T) < \frac{1}{\gamma(1+2\epsilon)}$, $\rho_1(a,R,T) \geq G_{R,\lambda}(0,0)$ and lemma 3.5 to obtain :

$$\begin{aligned} P\left[\left\|Z\right\|_{2q,R} \geq \sqrt{8b_T\epsilon}\right] \geq & \frac{\sqrt{\rho_1(a,R,T)}}{4\sqrt{\pi b_T\epsilon}}\left(1 - \frac{\rho_1(a,R,T)}{8b_T\epsilon}\right)\exp\left(-\frac{4b_T\epsilon}{\rho_1(a,R,T)}\right) \\ \geq & \frac{\sqrt{G_{R,\lambda}(0,0)}}{4\sqrt{\pi b_T\epsilon}}\left(1 - \frac{1}{8b_T\epsilon\gamma(1+2\epsilon)}\right)\exp\left(-\frac{4b_T\epsilon}{G_{R,\lambda}(0,0)}\right). \end{aligned}$$

We conclude from $G_{R,\lambda(0,0)} \to G(0,0)$ that

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{b_T} \log P\left[\left\|Z\right\|_{2q,R} \geq \sqrt{8b_T\epsilon}\right] \geq -\frac{4\epsilon}{G(0,0)}. \tag{45}$$

Putting together (43),(44) and (45), we have for $b_T \gg \log(T)$

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{b_T} \log P\left[I_T \geq b_T^q\right] \leq a - \gamma(1+\circ(\epsilon)) + \frac{4\epsilon}{G(0,0)}.$$

Let send ϵ to 0 then γ to $\frac{1}{\rho_1(a)}$. We obtain that for a little enough

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{b_T} \log P\left[I_T \geq b_T^q\right] \leq a - \frac{1}{\rho_1(a)}.$$

Let (a_n) be a sequence converging to 0 such that $\limsup_{n\to\infty} \rho_1(a_n) = \rho_1$:

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{b_T} \log P\left[I_T \geq b_T^q\right] \leq a_n - \frac{1}{\rho_1(a_n)}.$$

Then we let n go to infinity. We finish the proof by showing that the conditions $\lambda R^d \gg 1$, $b_T^q \gg R^d$ and $\log(T) \ll b_T \ll T$ are compatible. Indeed, the first two conditions imply that $b_T \gg T^{\frac{1}{q+1}}$. In conclusion, we have proved that for $T^{\frac{1}{q+1}} \ll b_T \ll T$:

$$\limsup_{T\to+\infty} \frac{1}{b_T} \log P\left[I_T \geq b_T^q\right] \leq -\frac{1}{\rho_1}.$$

$\square$

4. Lower bound

This part is devoted to the proof of the large deviations lower bound.

THÉORÈME 4.1. *Lower bound for I_T.*
Assume that $q(d-\alpha) \geq d$ and $b_T \ll T$ then

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{b_T} \log P\left[I_T \geq b_T^q\right] \geq -\kappa(q). \tag{46}$$

DÉMONSTRATION. Fix $M>0$. Let T_0 be such that for all $T \geq T_0$, $\frac{T}{b_T} > M$. For $T \geq T_0$, we have :

$$P\left[I_T \geq b_T^q\right] \geq P\left[I_{Mb_T} \geq b_T^q\right] = P\left[\left\|\frac{l_{Mb_T}}{Mb_T}\right\|_q \geq \frac{1}{M}\right].$$

The function $\nu \in \mathcal{F} \mapsto \|\nu\|_q = \sup_{f;\|f\|_{q'}=1} \left\{\sum_x \nu(x) f(x)\right\}$ is lower semicontinuous in τ-topology hence $\forall t>0$, $\left\{\nu \in \mathcal{F}, \|\nu\|_q > t\right\}$ is an open subset of $\mathcal{F}$. Therefore, using the classical results of Donsker and Varadhan [**DV75a**] on local time of Markov process, we have that $\forall \epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{Mb_T} \log P\left[\left\|\frac{l_{Mb_T}}{Mb_T}\right\|_q \geq \frac{1}{M}\right] &\geq \liminf_{T\to\infty} \frac{1}{Mb_T} \log P\left[\left\|\frac{l_{Mb_T}}{Mb_T}\right\|_q > \frac{1-\epsilon}{M}\right] \\
&\geq -\inf_f \left\{< f, -Af > ; \|f\|_2 = 1 \,, \|f\|_{2q}^2 > \frac{1-\epsilon}{M}\right\}.
\end{aligned}$$

We have thus proved that $\forall M>0$, $\forall \epsilon>0$,

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{b_T} \log P\left[I_T \geq b_T^q\right] \geq -M\kappa_1\left(\frac{1-\epsilon}{M}\right)$$

where $\kappa_1(y) := \inf_f \left\{< f, -Af > ;\ \|f\|_{2q}^2 > y\,,\ \|f\|_2 = 1\right\}$.
It remains to prove that for $\forall y>0$, $\inf_{M>0} M\kappa_1(y/M) = y\kappa(q)$.

$$\begin{aligned}
\inf_{M>0} M\kappa_1(y/M) &= y \inf_{M>0} M\kappa_1(1/M) \\
&= y \inf_{M>0} \inf_f \left\{M < f, -Af > ; \|f\|_2 = 1 \,, \|f\|_{2q}^2 > \frac{1}{M}\right\} \\
&= y \inf_f \inf_{M>0} \left\{M < f, -Af >; M > \frac{1}{\|f\|_{2q}^2},\ \|f\|_2 = 1\right\} \\
&= y \inf_f \left\{\frac{< f, -Af >}{\|f\|_{2q}^2},\ \|f\|_2 = 1\right\} ; \\
&= y\kappa(q).
\end{aligned}$$

To finish the proof it suffices to let $\epsilon \to 0$.

□

5. Proof of proposition 1.1 and theorem 1.2

Until now we have obtained a lower bound with $\kappa(q)$ and an upper bound with ρ_1. We show in proposition 5.1 another upper bound for large deviations of I_T with the constant $\rho(q)$. Then in proposition 5.2 we prove that $\kappa(q)$ is a non degenerate constant and we finish the proof of our large deviations principle with Proposition 5.3, where we show that the upper bound and the lower bound are the same.

PROPOSITION 5.1. *: **Behavior of** $\rho_1(a,R,T)$.*
Assume that $q(d-\alpha) \geq d$ and that λ and R depend on T in such a way that $\lambda R^{d/q'} \gg 1$, then under assumption 1 we have :

$$\rho_1 \leq \rho(q).$$

DÉMONSTRATION. By definition $\rho_1(a,R,T) = \sup_f \left\{ \sum_{x,y\in\mathbb{T}_R} f(x)G_{R,\lambda}(x-y)f(y)\,;\,\|f\|_{(2q)',R} = 1 \right\}$.
Since the space of $\{f/\,\|f\|_{(2q)',R} = 1\}$ is compact there exists $f_0 \in l_{(2q)'}(\mathbb{T}_R)$ realizing the supremum. Of course $f_0 \geq 0$ since the supremum is obtained with non-negative function.
Let $0 < r < R$ and define

$$\mathcal{C}_{r,R} = \cup_{i=1}^d \left\{ x \in \mathbb{Z}^d\,;\, 0 \leq x_i \leq r \text{ or } R-r \leq x_i \leq R \right\}\,.$$

We can assume that $\sum_{x\in\mathcal{C}_{r,R}} f_0(x)^{(2q)'} \leq \frac{2dr}{R}$. Indeed on one side we have

$$\begin{aligned}\sum_{a\in[0,R]^d}\sum_{x\in\mathcal{C}_{r,R}} f_0(x-a)^{(2q)'} &= \sum_{x\in\mathcal{C}_{r,R}}\sum_{a\in[0,R]^d} f_0(x-a)^{(2q)'}\\ &= \sum_{x\in\mathcal{C}_{r,R}}\sum_{x\in\mathbb{T}_R} f_0(x)^{(2q)'} = \mathrm{card}(\mathcal{C}_{r,R})\,\|f_0\|_{(2q)'}^{(2q)'} \leq 2drR^{d-1},\end{aligned}$$

and on the opposite side we have

$$\sum_{a\in[0,R]^d}\sum_{x\in\mathcal{C}_{r,R}} f_0(x-a)^{(2q)'} \geq R^d \inf_{a\in[0;R]^d} \sum_{x\in\mathcal{C}_{r,R}} f_0(x-a)^{(2q)'}\,.$$

Thus

$$\inf_{a\in[0;R]^d}\{\sum_{x\in\mathcal{C}_{r,R}} f_0(x-a)^{(2q)'}\} \leq \frac{2dr}{R}.$$

Moreover $f_{0,a}(x) := f_0(x-a)$ is a periodic function of period R. Note that $\|f_{0,a}\|_{(2q)',R} = \|f_0\|_{(2q)',R}$ and $\sum_{x,y\in\mathbb{T}_R} f_{0,a}(x)G_{R,\lambda}(x-y)f_{0,a}(y) = \sum_{x,y\in\mathbb{T}_R} f_0(x)G_{R,\lambda}(x-y)f_0(y)$.
Finally, we can assume that

$$\sum_{x\in\mathcal{C}_{r,R}} f_0(x)^{(2q)'} \leq \frac{2dr}{R}. \tag{47}$$

Let $\psi : \mathbb{Z}^d \mapsto [0,1]$ be a truncature function satisfying

$$\begin{cases} \psi(x) = 0 & \text{if } x \notin [0;R]^d \\ \psi(x) = 1 & \text{if } x \in [0;R]^d \backslash \mathcal{C}_{r,R}\,. \end{cases}$$

Let $g_0 = \frac{\psi f_0}{\|\psi f_0\|_{(2q)'}}$ be our candidate to realize the supremum in the definition of $\rho(q)$.
Fix $\epsilon \in]0,1[$ and take $r = \frac{\epsilon R}{2d}$. First we can remark that $\|\psi f_0\|_{(2q)'} > 0$. Indeed :

$$\|\psi f_0\|_{(2q)'}^{(2q)'} \geq \sum_{x\in[0;R]^d} f_0^{(2q)'}(x) - \sum_{x\in\mathcal{C}_{r,R}} f_0^{(2q)'}(x) \geq 1 - \frac{2dr}{R} = 1-\epsilon > 0.$$

By Lemma 2.1, there exists a constant C such that $\forall\lambda, R > 0, \forall x \in [0,R]^d$, $G(x) \geq G_{R,\lambda}(x) - \frac{C}{\lambda R^d}$, hence :

$$\begin{aligned}
&\sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d} g_0(x)G(x-y)g_0(y)\\
=&\frac{1}{\|\psi f_0\|^2_{(2q)'}}\sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d}\psi(x)f_0(x)G(x-y)\psi(y)f_0(y)\\
\geq&\sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d}\psi(x)f_0(x)G(x-y)\psi(y)f_0(y)\\
\geq&\sum_{x,y\in[0,R]^d} f_0(x)G(x-y)f_0(y) - 2\sum_{x\in[0,R]^d, y\in\mathcal{C}_{r,R}} f_0(x)G(x-y)f_0(y)\\
=&\rho_1(a,R,T) - \frac{C}{\lambda R^d}\left(\sum_{x\in[0,R]^d} f_0(x)\right)^2 - 2\sum_{x\in[0,R]^d, y\in\mathcal{C}_{r,R}} f_0(x)G(x-y)f_0(y). \qquad (48)
\end{aligned}$$

Let us work on (48). We first show that $\sum\limits_{x\in[0,R]^d} f_0(x) \leq R^{\frac{d}{2q}}$:

$$\sum_{x\in[0,R]^d} f_0(x) \quad\leq\quad \left(\sum_{x\in[0,R]^d} f_0^{(2q)'}(x)\right)^{\frac{1}{(2q)'}} (R^d)^{\frac{1}{2q}} = R^{\frac{d}{2q}}. \qquad (49)$$

We control now $\sum\limits_{x\in[0,R]^d, y\in\mathcal{C}_{r,R}} f_0(x)G(x-y)f_0(y)$. Using (47) and the fact that $\|f_0\|_{(2q)',R} = 1$ we have :

$$
\begin{aligned}
&\sum_{x\in[0,R]^d, y\in\mathcal{C}_{r,R}} f_0(x)G(x-y)f_0(y)\\
&= \sum_{x\in[0,R]^d, y\in\mathcal{C}_{r,R}} f_0^{1/(2q-1)}(x) f_0^{1/(2q-1)}(y) G(x-y) f_0^{\frac{2(q-1)}{2q-1}}(x) f_0^{\frac{2(q-1)}{2q-1}}(y)\\
&\leq \left(\sum_{x\in[0,R]^d, y\in\mathcal{C}_{r,R}} f_0^{q/(2q-1)}(x) f_0^{q/(2q-1)}(y) G^q(x-y)\right)^{1/q} \left(\sum_{x\in[0,R]^d, y\in\mathcal{C}_{r,R}} f_0^{\frac{2q}{2q-1}}(x) f_0^{\frac{2q}{2q-1}}(y)\right)^{(q-1)/q}\\
&\leq \left(\sum_{z\in[-R,R]^d} G^q(z) \sum_{y\in\mathcal{C}_{r,R}} f_0^{q/(2q-1)}(z+y) f_0^{q/(2q-1)}(y)\right)^{1/q} \left(\sum_{x\in[0,R]^d} f_0^{\frac{2q}{2q-1}}(x)\right)^{\frac{q-1}{q}}\\
&\quad \left(\sum_{x\in\mathcal{C}_{r,R}} f_0^{\frac{2q}{2q-1}}(x)\right)^{\frac{q-1}{q}}\\
&\leq \epsilon^{\frac{q-1}{q}} \left(\sum_{z\in[-R,R]^d} G^q(z) \left(\sum_{y\in\mathcal{C}_{r,R}} f_0^{\frac{2q}{2q-1}}(y)\right)^{1/2} \left(\sum_{y\in\mathcal{C}_{r,R}} f_0^{\frac{2q}{2q-1}}(z+y)\right)^{1/2}\right)^{1/q}\\
&\leq \epsilon^{\frac{2q-1}{2q}} \left(\sum_{z\in[-R,R]^d} G^q(z)\right)^{1/q}. \qquad (50)
\end{aligned}
$$

Finally, putting together (48),(49) and (50), we deduce that :

$$
\sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d} g_0(x)G(x-y)g_0(y) \geq \rho_1(a,R,T) - R^{\frac{d}{q}} \frac{C}{\lambda R^d} - 2\epsilon^{\frac{2q-1}{2q}} \left(\sum_{z\in[-R,R]^d} G^q(z)\right)^{1/q}.
$$

Let $\epsilon \to 0$: $\sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d} g_0(x)G(x-y)g_0(y) \geq \rho_1(a,R,T) - \frac{C}{\lambda R^{d/q'}}$.

Hence,

$$
\sup_g \left\{ \sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d} g(x)G(x-y)g(y),\ \|g\|_{(2q)'} = 1,\ \mathrm{supp}(g) \subset [0,R]^d \right\} \geq \rho_1(a,R,T) - \frac{C}{\lambda R^{d/q'}}.
$$

Therefore,

$$
\sup_g \left\{ \sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d} g(x)G(x-y)g(y),\ \|g\|_{(2q)'} = 1,\ \mathrm{supp}(g)\ \text{compact} \right\} \geq \rho_1(a,R,T) - \frac{C}{\lambda R^{d/q'}}.
$$

Then we take a sequence $T_n \to +\infty$ such that $\rho_1(a,R,T_n) \to \rho_1(a)$. Hence by definition of $\rho(q)$ we obtain :

$$
\rho(q) \geq \rho_1(a).
$$

Then we take a sequence $a_n \to 0$ such that $\rho_1(a_n) \to \rho_1$. Hence,

$$\rho(q) \geq \rho_1.$$

$\square$

PROPOSITION 5.2. *Under assumption 1,*

(1) *If $q(d-\alpha) > d$ then $0 < \rho(q) < +\infty$.*
(2) *If $q(d-\alpha) = d$ then $0 < \kappa(q) < +\infty$.*

DÉMONSTRATION. (1) It is easy to see that $\rho(q) > 0$. Indeed, taking $f = \delta_0$ gives $\rho(q) \geq G_d(0,0)$. Now we show that $\rho(q)$ is finite. We proceed in the same way that in proposition 5.1, for all f with compact support such that $\|f\|_{(2q)'} = 1$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} f(x)G(x-y)f(y) = \sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d} f^{1/(2q-1)}(x) f^{1/(2q-1)}(y) G(y-x) f^{\frac{2(q-1)}{2q-1}}(x) f^{\frac{2(q-1)}{2q-1}}(y) \\
&\leq \left(\sum_{x,y\mathbb{Z}^d} f^{q/(2q-1)}(x) f^{q/(2q-1)}(y) G^q(y-x) \right)^{1/q} \left(\sum_{x,y\in\mathbb{Z}^d} f^{\frac{2q}{2q-1}}(x) f^{\frac{2q}{2q-1}}(y) \right)^{(q-1)/q} \\
&\leq \left(\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} G^q(x) \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} f^{q/(2q-1)}(x+y) f^{q/(2q-1)}(y) \right)^{1/q} \left(\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} f^{\frac{2q}{2q-1}}(x) \right)^{\frac{2(q-1)}{q}} \\
&\leq \left(\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} G^q(x) \left(\textstyle\sum_{y\in\mathbb{Z}^d} f^{\frac{2q}{2q-1}}(y) \right)^{1/2} \left(\displaystyle\sum_{y\in\mathbb{Z}^d} f^{\frac{2q}{2q-1}}(x+y) \right)^{1/2} \right)^{1/q} \\
&= \left(\sum_{x\in[0,R]^d} G^q(x) \right)^{1/q} = \|G\|_q .
\end{aligned} \tag{51}$$

Then we take the supremum over f. Moreover, thanks to the work of Le Gall and Rosen [**LGR91**], we know that $G(0,x) = O(|x|^{\alpha-d})$. Then $\|G\|_q$ is finite since $q(d-\alpha) > d$.

(2) To prove $\kappa(q) < \infty$ it suffices to take $f = \delta_0$. Indeed $\kappa(q) \leq < -A\delta_0, \delta_0 >= 1 - \mu(0) < +\infty$. Let us now prove that $\kappa(q) > 0$. The solution comes from the following result due to Varopoulos in [**Var85**] :

Let $\nu > 2$. If p_t is the transition probability of a symmetric Markov process $(Y_t, t \geq 0)$ defined on a measure space X, with V is the domain of the generator of $(Y_t, t \geq 0)$ and $\mathcal{E}$ its Dirichlet form. Then the following assertions are equivalent :

(a) $\exists C > 0$ such that $\forall x, y \in \mathbb{Z}^d, p_t(x,y) \leq \frac{C}{t^{\nu/2}}$.
(b) $\exists C' > 0$ such that $\forall f \in \mathcal{K} \cap V, \|f\|^2_{\frac{2\nu}{\nu-2}} \leq C'\mathcal{E}(f,f)$,
where $\mathcal{K} = \{f \in L^\infty(X),\ \mathrm{supp}(f) \text{ compact}\}$.

By Proposition 4.2 in [**BL02**] due to Bass and Levin, we know that

$$\exists C > 0 \text{ such that } \forall x, y \in \mathbb{Z}^d,\ p_t(x,y) \leq Ct^{-\frac{d}{\alpha}}.$$

Since $q(d-\alpha) = d$, $\nu = \frac{2d}{\alpha} > 2$. So, there exists $C' > 0$ such that $\forall f \in \mathcal{K} \cap V$, $\|f\|_{2q}^2 = \|f\|^2_{\frac{2d}{d-\alpha}} \leq C'\mathcal{E}(f,f)$. Let f with compact support such that $\|f\|_2 = 1$. Of course $f \in \mathcal{K}$. If $f \in V$ then $\|f\|^2_{\frac{2d}{d-\alpha}} \leq C'\mathcal{E}(f,f)$. If $f \notin V$ then $\mathcal{E}(f,f) = +\infty$ and the inequality is also true. Thus,

$$\forall f \text{ with compact support such that } \|f\|_2 = 1, \|f\|_{2q}^2 \leq C'\mathcal{E}(f,f).$$

Therefore, taking the infimum over all function f such that $\|f\|_2 = 1$ we have :

$$\inf_f \left\{ \frac{\mathcal{E}(f,f)}{\|f\|_{2q}^2}, \|f\|_2 = 1 \right\} = \inf_f \left\{ \frac{\mathcal{E}(f,f)}{\|f\|_{2q}^2}, \|f\|_2 = 1, \text{ supp(f) compact} \right\} \geq \frac{1}{C'}$$

□

Proposition 5.3. *Under assumption 1, if $q(d-\alpha) \geq d$ then $\kappa(q) = \frac{1}{\rho(q)}$.*

Démonstration. By theorem 3.1, theorem 4.1 and proposition 5.1 we know that $\frac{1}{\rho(q)} \leq \kappa(q)$. So we just have to prove that $\kappa(q) \leq \frac{1}{\rho(q)}$.
By definition $\rho(q) = \sup_g \Big\{ < g, Gg >, \text{ supp}(g) \text{ compact}, \|g\|_{(2q)'} = 1 \Big\}$. Note that

$$\rho(q) = \sup_g \Big\{ < g, Gg >, \text{ supp}(g) \text{ compact}, \|g\|_{(2q)'} = 1, \|Gg\|_2 < +\infty \Big\}. \tag{52}$$

Indeed if g has compact support and $\|g\|_{(2q)'} = 1$ then $\|Gg\|_2 < +\infty$.
We have seen in proposition 5.2 that $\rho(q) > 0$ when $q(d-\alpha) > d$ but the proof is also true when $q(d-\alpha) = d$. Furthermore proposition 5.2 gives us that if $q(d-\alpha) > d$ then $\rho(q)$ is finite. We proceed by contradiction to see that it is also true when $q(d-\alpha) = d$ using the same method that Chen and Mörters in [**CM09**].

Assume that $\rho(q) = +\infty$. Then by (52), $\forall B > 0$ there exists g with compact support, $\|g\|_{(2q)'} = 1$ and $\|Gg\|_2 < +\infty$ such that $< g, Gg > \geq B$.
Note that $< g, Gg > \leq \|g\|_{(2q)'} \|Gg\|_{2q} = \|Gg\|_{2q}$. So $\|Gg\|_{2q} \geq B$.
Then we set $f = \frac{Gg}{\|Gg\|_{2q}}$. We note that $\|f\|_{2q} = 1$ and $\|f\|_2 < +\infty$, hence :

$$\begin{aligned}
< g, Gg > &= < -AGg, Gg > \\
&= \|Gg\|_{2q}^2 < -\frac{AGg}{\|Gg\|_{2q}}, \frac{Gg}{\|Gg\|_{2q}} > \\
&\geq \|Gg\|_{2q}^2 \inf_f \Big\{ < -Af, f >, \|f\|_{2q} = 1, \|f\|_2 < +\infty \Big\} \\
&= \|Gg\|_{2q}^2 \inf_f \left\{ \frac{< -Af, f >}{\|f\|_2^2} \|f\|_2^2, \|f\|_{2q} = 1, \|f\|_2 < +\infty \right\} \\
&= \|Gg\|_{2q}^2 \inf_g \left\{ \frac{< -Ag, g >}{\|g\|_{2q}^2}, \|g\|_2 = 1 \right\} = \|Gg\|_{2q}^2 \kappa(q)
\end{aligned} \tag{53}$$

with $g = \frac{f}{\|f\|_2}$. Therefore,

$$\kappa(q) \leq \frac{< g, Gg >}{\|Gg\|_{2q}^2} \leq \frac{1}{\|Gg\|_{2q}} \leq \frac{1}{B}$$

then letting $B \to +\infty$ we have $\kappa(q) = 0$, which is in contradiction with proposition 5.2. Therefore $\rho(q)$ is finite.

Now we proceed in the same way that previously. Let $\epsilon \in]0, \rho(q)[$, by (52) there exists g with compact support, $\|g\|_{(2q)'} = 1$ and $\|Gg\|_2 < +\infty$ such that $\rho(q) \geq < g, Gg > \geq \rho(q) - \epsilon$. Moreover we have $\|Gg\|_{2q} \geq \rho(q) - \epsilon$, then we set $f = \frac{Gg}{\rho(q)-\epsilon}$ and obtain

$$\begin{aligned}\rho(q) \geq < g, Gg > &\geq (\rho(q) - \epsilon)^2 \inf_f \left\{ < -Af, f >,\ \|f\|_{2q} \geq 1,\ \|f\|_2 < +\infty \right\} \\ &= (\rho(q) - \epsilon)^2 \inf_f \left\{ < -Af, f >,\ \|f\|_{2q} = 1,\ \|f\|_2 < +\infty \right\}.\end{aligned}$$

Let $\epsilon \to 0$: $\frac{1}{\rho(q)} \geq \inf_f \left\{ < -Af, f >,\ \|f\|_{2q} = 1,\ \|f\|_2 < +\infty \right\}$.

Moreover we have seen in (53) that $\inf_f \left\{ < -Af, f >,\ \|f\|_{2q} \geq 1,\ \|f\|_2 < +\infty \right\} = \kappa(q)$, therefore $\kappa(q) \leq \frac{1}{\rho(q)}$.

$\square$

CHAPITRE 5

Large deviations for self-intersection local times in subcritical dimensions

ABSTRACT. Let $(X_t, t \geq 0)$ be a random walk on $\mathbb{Z}^d$. Let $l_t(x) = \int_0^t \delta_x(X_s)ds$ be the local time at site x and $I_t = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} l_t(x)^p$ the p-fold self-intersection local time (SILT). Becker and König [**BK11**] have recently proved a large deviations principle for I_t for all $(p, d) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{Z}^d$ such that $p(d-2) < 2$. We extend these results to a broader scale of deviations and to the whole subcritical domain $p(d-2) < d$. Moreover we unify the proofs of the large deviations principle using a method introduced by Castell [**Cas10**] for the critical case $p(d-2) = d$ and developed by Laurent [**Lau10b**] for the critical and supercritical case $p(d-\alpha) \geq d$ of α-stable random walk.

1. Introduction

Let $(X_t, t \geq 0)$ be a continuous time simple random walk on $\mathbb{Z}^d$, started from the origin. We denote by Δ his generator given by

$$\Delta f(x) = \sum_{y \sim x} (f(y) - f(x))$$

where we sum over the nearest neighbors of x.

Let P and E be the associated probability measure and expectation of the walk. In this article we are interested in the self-intersection local times (SILT) :

$$\forall p > 1, \forall t > 0, I_t = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} l_t(x)^p, \text{ where } \forall x \in \mathbb{Z}^d, \forall t > 0, l_t(x) = \int_0^t \delta_x(X_s)ds.$$

The SILT measures how much the random walk does intersect itself. Indeed, it is easy to see that if I_n is the discrete analogous of I_t, then we have

$$n \leq I_n \leq n^p,$$

because if the random walk stays one unit of time in each visited site then $I_n = n$, and if the random walk stays all the time in one site, $I_n = n^p$. This is a first clue to understand the SILT. More precisely, we have some law of large numbers type results. In dimension 1, we know that the random walk is recurrent, so the random walk does intersect itself a lot and $I_t \sim t^{(p+1)/2}$. In dimension 2, the random walk is still recurrent but has more space to live and now $I_t \sim t(\log t)^{p-1}$ (see [**Čer07**]). For higher dimension $d \geq 3$, the random walk is now transient and spends about one unit of time in each visited site, and $I_t \sim t$ (see [**BK09**]). It is clear that the SILT is related with the intersections of the random walk when p is an integer, because we can then rewrite the SILT as follows :

$$I_t = \int_0^t \cdots \int_0^t \mathbb{1}_{X_{t_1}=\cdots=X_{t_p}} dt_1 \cdots dt_p.$$

Our ability to determine if the trajectory of the random walk is unfolded or very concentrated in a few number of sites, interests physicists and notably statistical mechanicians (see for instance [**Bol89**],[**Wes80**]). For instance, a polymer $(X_n, n \in [0, N])$ can be modeled as the trajectory of a nearest neighborhood random walk under Gibbs measure with Hamiltonian βI_N. This measure favors polymers with few intersections for $\beta > 0$ whereas it favors polymers with a lot of intersections when $\beta < 0$.

The SILT is also relevant when we are interested in the random walk in random scenery (see for instance [**KS79**],[**AC07b**],[**GKS07**],[**Ass08**],[**FMW08**],[**Ass09**]). The model is the following. Let us consider a random walk $(X_t, t \geq 0)$ on $\mathbb{Z}^d$. The random scenery is an independent and identically distributed field $(Y_z, z \in \mathbb{Z}^d)$ independent of the walk. The associated random walk in random scenery is $Z_t = \int_0^t Y(X_s)ds$. It is easy to see that $Z_t = \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} Y(z)l_t(z)$ where $l_t(z)$ is the local time of the random walk $(X_t, t \geq 0)$. Now if we assume that $(Y(z), z \in \mathbb{Z}^d)$ is for instance a centered Gaussian field, then conditionally on $(X_s, 0 \leq s \leq t)$, $Z_t \sim \mathcal{N}(0, I_t)$.

We have seen some Law of large numbers results, let us state Central limit theorem in the most studied case $p = 2$:

(1) in dimension $d = 1$, $\frac{I_t}{t^{3/2}} \xrightarrow{(d)} \gamma_1$, where γ_1 is the intersection local time of a Brownian motion (see [**Bor81**],[**CL04**],[**Per82**]).

(2) in dimension $d = 2$, $\frac{I_t - E[I_t]}{t} \xrightarrow{(d)} \gamma_1'$, where γ_1' is the renormalized intersection local time of a Brownian motion (see [**Dyn88b**],[**LG86a**],[**Ros90**],[**Sto89**]), and $E[I_t] \sim Ct\log(t)$ where C is an explicite constant (see [**Čer07**]).

(3) in dimension $d \geq 3$, $\frac{I_t - E[I_t]}{\sqrt{\mathrm{Var}(I_t)}} \xrightarrow{(d)} \mathcal{N}(0,1)$ (see [**Che08**]), where $E[I_t] \sim Ct$ with C an explicite constant (see [**BK09**]), and $Var(I_t) \sim \begin{cases} t\log(t) \text{ if } d = 3 \\ t \text{ if } d > 4\,. \end{cases}$ (see [**BS95**]).

Since the law of large numbers and limit laws have been established, it is natural to be interested in the large deviations of the SILT. The large deviations are the study of rare events. In this article we wonder how I_t can exceed its mean, i.e. we estimate the probability $P(I_t \geq t^p r_t^p)$ where $t^t r_t^p \gg E[I_t]$. Heuristically, it is interesting to ask how the walk can realize this kind of atypical event. We propose here a classical strategy for the walk to realize large deviations of its SILT.

Let us localize the walk in a ball of radius R up to time τ. On one hand, the walk arrives at the edge of the ball in R^2 units of time, and the probability of this localization is about $\exp(-\frac{\tau}{R^2})$. On the other hand, the walk spends about $\frac{\tau}{R^d}$ units of time on each site of the ball, so I_t increases to $\left(\frac{\tau}{R^d}\right)^p R^d = \tau^p R^{d(1-p)}$. We want

$I_t = t^p r_t^p$, which gives $\tau = tr_t R^{\frac{d(p-1)}{p}}$. Thus the probability of this localization is about $\exp\left(-tr_t R^{\frac{d(p-1)}{p}-2}\right)$. Maximizing this quantity in R, we obtain three cases :

(1) $\frac{d(p-1)}{p} - 2 > 0 \Leftrightarrow p(d-2) > d$ (supercritical case) : in this case the optimal choice for R is 1. A good strategy to realize the large deviations is to spend a time of order tr_t in a ball of radius 1, and then : $P(I_t \geq t^t r_t^p) \sim \exp(-tr_t)$.

(2) $\frac{d(p-1)}{p} - 2 = 0 \Leftrightarrow p(d-2) = d$ (critical case) : here the choice of R does not matter. Every strategy consisting in spending a time of order $tr_t R^{\frac{d(p-1)}{p}}$ in a ball of radius R such that $1 \leq R \ll 1/\sqrt{r_t}$ could be a good strategy, so $P(I_t \geq t^p r_t^p) \sim \exp(-tr_t)$.

(3) $\frac{d(p-1)}{p} - 2 < 0 \Leftrightarrow p(d-2) < d$ (subcritical case) : a good strategy is to stay up to time t in a ball of maximal radius, i.e. $\left(\frac{1}{r_t}\right)^{\frac{p}{d(p-1)}}$, thus $P(I_t \geq tr_t) \sim \exp\left(-tr_t^{\frac{2p}{d(p-1)}}\right)$.

The question of the large deviations for the SILT has been studied a lot during the last decade. We make a brief review of the results obtained so far.

In the subcritical case $p(d-2) < d$, the authors of [**CL04**] and [**BCR06**] use the limit object in the central limit theorem to solve the question. The large deviations principle is obtained for all $p \in]1, +\infty[$ in dimension 1, and only for $p = 2$ in dimension 2 and 3. The exact asymptotic of $\frac{1}{tr_t^{2p/d(p-1)}} \log P(I_t \geq tr_t)$ is given in terms of a variational formula, involving functions defined on $\mathbb{R}^d$ and related to Gagliardo-Nirenberg inequality. In a very recent paper, Becker and König [**BK11**] answer partly the question of the generalization to real value of p. Indeed, they prove a large deviations principle with two restrictions. The first one is a parameter-dimension restriction. They need $p(d-2) < 2$ instead of $p(d-2) < d$. The second one is a scale restriction. The large deviations principle is only obtained for $I_t \gg (\log t)^{\frac{d(p-1)}{d+2}} t^{\frac{2p+d}{d+2}}$ which is larger than the scale of the mean of I_t given previously.

In the critical case $p(d-2) = d$, Castell [**Cas10**] uses a version of Dynkin isomorphism theorem due to Eisenbaum (theorem 2.3), which links the law of the local times with the law of a Gaussian process. The constant of large deviations is expressed in term of the best constant in a Sobolev inequality.

In the supercritical case $p(d-2) > d$, Chen and Mörters [**CM09**] proved a large deviations principle for integer value of p computing large moments of the SILT. Asselah [**Ass09**] improved this result getting the large deviations principle up to the scale of the mean but only for $p = 2$. Finally Laurent [**Lau10b**] proved a large deviations principle for all $p > 1$ and for an α-stable random walk with $p(d-\alpha) \geq d$ using the Dynkin isomorphism theorem.

A recent monograph of Chen [**Che10**] summarizes these results, we refer to it for an exhaustive treatment of the subject.

In this paper, we extend the results of Becker and König [**BK11**] in two different directions. We obtain a large deviations principle down to the scale of the mean, and we take off their condition $p(d-2) < 2$. Furthermore we unify the proofs of the large deviations principle in the three different cases, proving that the method based on the Dynkin isomorphism theorem is also working in the subcritical case.

1.0.0.4. Main results.

Let us introduce some notations to state our results. We denote by ∇ and by $\|\cdot\|_p$ the continuous gradient and the L^p-norm of functions defined on $\mathbb{R}^d$, and by q the conjugate of p.

THÉORÈME 1.1. *Let* $\chi_{d,p} := \inf\left\{\frac{1}{2}\|\nabla g\|_2^2, g \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^{2p}(\mathbb{R}^d) \text{ such that } \|g\|_2 = \|g\|_{2p} = 1\right\}$.
Assume that $p(d-2) < d$ *and that*
- in dimension $d = 1$, $\frac{1}{t^{1/2q}} \ll r_t \ll 1$
- in dimension $d = 2$, $\left(\frac{\log t}{t}\right)^{1/q} \ll r_t \ll 1$
- in dimension $d \geq 3$, $\frac{1}{t^{1/q}} \ll r_t \ll 1$
then we have

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{tr_t^{2q/d}} \log P\left(I_t \geq t^p r_t^p\right) = -\chi_{d,p}.$$

REMARQUE 1.2. *About the scale of the deviations.*
Note that our conditions on r_t *are equivalent to* $t^p r_t^p \gg E[I_t]$. *We haven't succeeded to go under the scale of the mean. This question is still open with the exception of the dimension 2 and 3 for* $p = 2$ *in the subcritical case* $p(d-2) < d$ *(see the monograph of Chen* [**Che10**]*). In the case where the dimension is larger than 5 and for* $p = 2$ *(supercritical case* $p(d-2) > d$*), Asselah* [**Ass09**] *has succeeded to obtain the constant of deviations up to the scale of the mean.*

REMARQUE 1.3. $\chi_{d,p}$ *is non degenerate.*
We prove that the constant $\chi_{d,p}$ *is non degenerate linking it to the best constant in the Gagliardo-Nirenberg inequality. We recall that the Gagliardo-Niremberg constant* $K_{d,p}$ *is defined by*

$$K_{d,p} = \sup_g \left\{ \frac{\|g\|_{2p}}{\|\nabla g\|_2^{d/2q} \|g\|_2^{1-d/2q}} \right\}$$

and is a non degenerate constant in the subcritical case $p(d-2) < d$. *This expression being invariant under the transformation* $g_\beta(\cdot) = \beta^{d/2p} g(\beta \cdot)$, *we can take the supremum over* $\|g\|_2 = 1$. *So,*

$$K_{d,p} = \sup \left\{ \frac{\|g\|_{2p}}{\|\nabla g\|_2^{d/2q}}, \|g\|_2 = 1 \right\}.$$

Again, we remark that this expression is invariant under the transformation $g_\beta(\cdot) = \beta^{d/2} g(\beta \cdot)$. *So we can take the supremum over* $\|g\|_{2p} = 1$ *then*

$$K_{d,p} = \sup \left\{ \|\nabla g\|_2^{-d/2q}, \|g\|_2 = \|g\|_{2p} = 1 \right\}.$$

So $\chi_{d,p} = \frac{1}{2} K_{d,p}^{-4q/d}$.

Sketch of proof.

The proof of the lower bound of the large deviations principle (Section 3) is quite classical. Let $L_t = \frac{\alpha_t^d}{t} l_t(\lfloor \alpha_t x \rfloor)$ be a rescaled version of l_t. Gantert, König and Shi (lemma 3.1in [**GKS07**]) proved that for $R > 0$, under the sub-probability measure $P(\cdot, supp(L_t) \subset [-R, R]^d)$, L_t satisfies a large deviations principle on $\mathcal{F} = \left\{\psi \text{ such that } \|\psi\|_2 = 1 \text{ and } supp(\psi) \subset [-R, R]^d\right\}$ with rate function $\mathcal{I}(\psi) = \frac{1}{2}\|\nabla\psi\|_2^2$. Let $\|\cdot\|_{p,R}$ be the L^p-norm of functions defined on $[-R, R]^d$, then the function

$$\psi \in \mathcal{F} \to \|\psi\|_{p,R} = \sup\left\{\int\limits_{[-R,R]^d} \psi(x)\phi(x), \|\phi\|_{q,R} = 1\right\}$$

being lower semi-continuous, we can apply a contraction principle.

For the upper bound, we can not proceed in the same way as I_t is only a lower semi-continuous function of l_t. Many different methods were developed in the papers written on the subject to overcome this difficulty. In this paper, we use the same method as Castell [**Cas10**] and Laurent [**Lau10b**], i.e. the version of Dynkin isomorphism theorem due to Einsenvaum (theorem 2.3).

Let us describe the proof of the upper bound in theorem 1.1 (Section 2). In step 1, we compare the SILT of the random walk with the SILT of the random walk projected on the discrete torus $\mathbb{T}_{R\alpha_t}$ of radius $R\alpha_t$, and stopped at an exponential time of parameter λ_t independent of the walk (lemma 2.2). Then we apply in step 2 and 3 Dynkin's theorem (theorem 2.3) to arrive at a centered Gaussian process $(Z_x, x \in \mathbb{T}_{R\alpha_t})$ whose covariance is given by $G_{R\alpha_t,\lambda}(x, y) = E_x\left[\int_0^\tau \delta_x(X_s^{R\alpha_t})ds\right]$ (lemma 2.4) where $(X_s^{R\alpha_t}, s \geq 0)$ is the random walk projected on $\mathbb{T}_{R\alpha_t}$. In step 4 we work on the Gaussian process (lemma 2.5) to obtain an upper bound $\rho_1(a, R, t)$ given by a discrete-space variational formula :

$$\rho_1(a, R, t) = \inf\left\{\lambda_t N_{2,R\alpha_t}^2(h) + \frac{1}{2}N_{2,R\alpha_t}^2(\tilde{\nabla}h), h \in L^{2p}(\mathbb{T}_{R\alpha_t}) \text{ such that } N_{2p,R\alpha_t}(h) = 1\right\},$$

where $N_p(\cdot)$ is the l^p-norm of functions defined on $\mathbb{Z}^d$, $N_{p,A}(\cdot)$ the l^p-norm of A-periodic functions defined on $\mathbb{Z}^d$, and $\tilde{\nabla}$ the discrete gradient defined by

$$\forall x \in \mathbb{Z}^d, \forall i \in \{1, ..., d\}, \tilde{\nabla}_i f(x) = f(x + e_i) - f(x),$$

where $(e_1, ..., e_d)$ is the canonical base of $\mathbb{R}^d$. Then step 5 is devoted to take the limit using the following proposition.

Proposition 1.4. *Let* $\rho(a) = \inf\left\{a\|h\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla h\|_2^2, h \in L^{2p}(\mathbb{R}^d) \text{ such that } \|h\|_{2p} = 1\right\}$. *Assume that* $\alpha_t = r_t^{-q/d}$ *and* $\lambda_t = a\alpha_t^{-2} = ar_t^{2q/d}$. *If* $p(d-2) < d$, *then*

$$\liminf_{R\to+\infty}\liminf_{t\to+\infty} r_t^{1-2q/d}\rho_1(a, R, t) \geq \rho(a).$$

The proof of proposition 1.4 is inspired by the proof of Lemma 2.1 of Becker and König [**BK11**]. The main difficulty is to pass from the discrete-space variational formula giving $\rho_1(a,R,t)$ to the continuous-space variational formula giving $\rho(a)$. First we take a sequence h_n of functions defined on $\mathbb{Z}^d$ that approach the infimum in the definition of $\rho_1(a,R,t)$. Then we extend these functions on $\mathbb{R}^d$ to build a sequence g_n of continuous functions defined on $\mathbb{R}^d$. This sequence g_n of functions is our candidate to realize the infimum in the definition of $\rho(a)$. Furthermore, by definition of $\rho_1(a,R,t)$ and $\rho(a)$, we want to control $N_{2,R\alpha_t}(h_n)$ by $\|g_n\|_2$ and $N_{2,R\alpha_t}(\tilde{\nabla} h_n)$ by $\|\nabla g_n\|_2$. This control, combined with the continuity of the sequence g_n is the main difficulty of the proof.

We finally prove that the upper and the lower bound are equals with the following proposition :

Proposition 1.5. *Let $\rho(a)$ be as in theorem 1.1 and $\chi_{d,p}$ be as in proposition 1.4, then*

$$\inf\{a-\rho(a), a>0\} = -\chi_{d,p}.$$

2. Proof of the upper bound of Theorem 1.1

Let us begin with a lemma. We denote by $p_s^{R\alpha_t}(\cdot,\cdot)$ the probability transition of the random walk $(X_s^{R\alpha_t}, s\geq 0)$.

Lemme 2.1. *Behavior of $G_{R\alpha_t,\lambda_t}(0,0)$.*
Assume that $\lambda_t = a\alpha_t^{-2}$ and $\lambda_t \to 0$. Then for any $a,R>0$,

(1) *for $d=1$, $G_{R\alpha_t,\lambda_t}(0,0) = O(\alpha_t)$.*
(2) *for $d=2$, $G_{R\alpha_t,\lambda_t}(0,0) = O(\log\alpha_t)$.*
(3) *for $d\geq 3$, $G_{R\alpha_t,\lambda_t}(0,0) = O(1)$.*

Démonstration. Applying theorems 3.3.15 and 2.3.1 in [**SC97**], we know by Nash inequalities that

$$\exists C>0 \text{ such that } \forall s>0,\ \left|p_s^{R\alpha_t}(0,0) - \frac{1}{(R\alpha_t)^d}\right| \leq \frac{C}{s^{d/2}}.$$

So

$$\begin{aligned}
G_{R\alpha_t,\lambda_t}(0,0) &= \int_0^{+\infty} \exp(-s\lambda_t) p_s^{R\alpha_t}(0,0)ds \\
&\leq 1 + \int_1^{+\infty} \exp(-s\lambda_t)\left(\frac{1}{(R\alpha_t)^d} + \frac{C}{s^{d/2}}\right)ds \\
&\leq 1 + \frac{1}{\lambda_t (R\alpha_t)^d} + \lambda_t^{d/2-1}\int_{\lambda_t}^{+\infty} \frac{C\exp(-u)}{u^{d/2}}du.
\end{aligned}$$

As $\lambda_t \to 0$, for t large enough,

$$G_{R\alpha_t,\lambda_t}(0,0) \leq 1 + \frac{1}{\lambda_t(R\alpha_t)^d} + C\lambda_t^{d/2-1}\left(\int_{\lambda_t}^1 \frac{du}{u^{d/2}} + 1\right).$$

Remember that $\lambda_t = a\alpha_t^{-2}$, then we have the result in the three cases. □

2.1. Step 1 : comparison with the SILT of the random walk on the torus stopped at an exponential time.

LEMME 2.2. *Let τ be an exponential time of parameter $\lambda_t = a\alpha_t^{-2}$. Let $l_{R\alpha_t,\tau}(x) = \int_0^\tau \delta_x(X_s^{R\alpha_t})\, ds$. Then $\forall a, R, \alpha_t > 0$:*

$$P\left[N_p(l_t) \geq tr_t\right] \leq e^{t\lambda_t} P\left[N_{p,R\alpha_t}(l_{R\alpha_t,\tau}) \geq tr_t\right].$$

DÉMONSTRATION. We deduce by convexity that

$$\begin{aligned} N_p^p(l_t) &= \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} l_t^p(x) = \sum_{x\in\mathbb{T}_{R\alpha_t}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} l_t^p(x + kR\alpha_t) \\ &\leq \sum_{x\in\mathbb{T}_{R\alpha_t}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} l_t(x + kR\alpha_t)\right)^p = \sum_{x\in\mathbb{T}_{R\alpha_t}} l_{R\alpha_t,t}^p(x) = N_{p,R\alpha_t}^p(l_{R\alpha_t,t}). \end{aligned}$$

Then using the fact that $\tau \sim \mathcal{E}(\lambda_t)$ is independent of $(X_s, s \geq 0)$ we get :

$$\begin{aligned} P\left[N_p(l_t) \geq tr_t\right] \exp\left(-t\lambda_t\right) &\leq P\left[N_{p,R\alpha_t}(l_{R\alpha_t,t}) \geq tr_t\right] P(\tau \geq t) \\ &= \mathbb{P}\left[N_{p,R\alpha_t}(l_{R\alpha_t,t}) \geq tr_t, \tau \geq t\right] \\ &\leq P\left[N_{p,R\alpha_t}(l_{R\alpha_t,\tau}) \geq tr_t\right]. \end{aligned}$$

Finally, $P\left[N_p(l_t) \geq tr_t\right] \leq e^{t\lambda_t} P\left[N_{p,R\alpha_t}(l_{R\alpha_t,\tau}) \geq tr_t\right]$.

□

2.2. Step 2 : the Eisenbaum isomorphism theorem.

THÉORÈME 2.3. *(Eisenbaum, see for instance corollary 8.1.2 page 364 in* [**MR06**]*). Let τ be as in lemma 2.2 and let $(Z_x, x \in \mathbb{T}_{R\alpha_t})$ be a centered Gaussian process with covariance matrix $G_{R\alpha_t,\lambda_t} = E_x\left[\int_0^\tau \delta_x(X_s^{R\alpha_t}) ds\right]$ independent of τ and of the random walk $(X_s, s \geq 0)$. For $s \neq 0$, consider the process $S_x := l_{R\alpha_t,\tau}(x) + \frac{1}{2}(Z_x + s)^2$, then for all measurable and bounded function $F : \mathbb{R}^{\mathbb{T}_{R\alpha_t}} \mapsto \mathbb{R}$:*

$$E\left[F((S_x; x \in \mathbb{T}_{R\alpha_t}))\right] = E\left[F\left((\frac{1}{2}(Z_x + s)^2; x \in \mathbb{T}_{R\alpha_t})\right)\left(1 + \frac{Z_0}{s}\right)\right].$$

2.3. Step 3 : Comparison between $N_{p,R\alpha_t}(l_{R\alpha_t,\tau})$ and $N_{2p,R\alpha_t}(Z)$.

LEMME 2.4. *Let τ and $(Z_x, x \in \mathbb{T}_{R\alpha_t})$ be defined as in theorem 2.3. For all $\epsilon > 0$, there exists a constant $C(\epsilon)$ such that $\forall a, R, \alpha_t, r_t > 0$:*

$$P\left(N_{p,R\alpha_t}(l_{R\alpha_t,\tau}) \geq tr_t\right) \leq C(\epsilon)\left(1 + \frac{(R\alpha_t)^{d/2p}}{\epsilon\sqrt{2\epsilon tr_t\lambda_t}}\right) \frac{P\left(N_{2p,R\alpha_t}(Z) \geq \sqrt{2tr_t}(1 + \circ(\epsilon))\right)^{1/(1+\epsilon)}}{P(N_{2p,R\alpha_t}(Z) \geq (1+\epsilon)\sqrt{2tr_t\epsilon})}.$$

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned} S_x := l_{R\alpha_t,\tau}(x) + \frac{1}{2}(Z_x + s)^2 &\Rightarrow S_x^p \geq l_{R\alpha_t,\tau}^p(x) + \left(\frac{1}{2}(Z_x + s)^2\right)^p \\ &\Rightarrow N_{p,R\alpha_t}^p(S) \geq N_{p,R\alpha_t}^p(l_{R\alpha_t,\tau}) + \frac{1}{2^p} N_{2p,R\alpha_t}^{2p}(Z + s). \end{aligned}$$

By independence of $(Z_x, x \in \mathbb{T}_{R\alpha_t})$ with the random walk $(X_s, s \geq 0)$ and the exponential time τ, we have $\forall \epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
&P\left(N^p_{p,R\alpha_t}(l_{R\alpha_t,\tau}) \geq t^p r_t^p\right) P\left(\frac{1}{2^p} N^{2p}_{2p,R\alpha_t}(Z+s) \geq t^p r_t^p \epsilon^p\right)\\
=&P\left(N^p_{p,R\alpha_t}(l_{R\alpha_t,\tau}) \geq t^p r_t^p, \frac{1}{2^p} N^{2p}_{2p,R\alpha_t}(Z+s) \geq t^p r_t^p \epsilon^p\right)\\
\leq&P\left(N^p_{p,R\alpha_t}(l_{R\alpha_t,\tau}) + \frac{1}{2^p} N^{2p}_{2p,R\alpha_t}(Z+s) \geq t^p r_t^p (1+\epsilon^p)\right)\\
\leq&P\left(N^p_{p,R\alpha_t}(S) \geq t^p r_t^p (1+\epsilon^p)\right)\\
=&E\left[\left(1+\frac{Z_0}{s}\right); \frac{1}{2^p} N^{2p}_{2p,R\alpha_t}(Z+s) \geq t^p r_t^p (1+\epsilon^p)\right] \qquad (54)
\end{aligned}$$

where the last equality comes from Theorem 2.3. Moreover by Hölder's inequality, $\forall \epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
&E\left[\left(1+\frac{Z_0}{s}\right); \frac{1}{2^p} N^{2p}_{2p,R\alpha_t}(Z+s) \geq t^p r_t^p (1+\epsilon^p)\right]\\
\leq&E\left[\left|1+\frac{Z_0}{s}\right|^{1+1/\epsilon}\right]^{\epsilon/(1+\epsilon)} P\left(N^{2p}_{2p,R\alpha_t}(Z+s) \geq 2^p t^p r_t^p (1+\epsilon^p)\right)^{1/(1+\epsilon)}. \qquad (55)
\end{aligned}$$

Combining (54) and (55) we obtain that $\forall a, \epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
&P\left(N_{p,R\alpha_t}(l_{R\alpha_t,\tau}) \geq t r_t\right)\\
\leq&E\left[\left|1+\frac{Z_0}{s}\right|^{1+1/\epsilon}\right]^{\epsilon/(1+\epsilon)} \frac{P\left(N_{2p,R\alpha_t}(Z+s) \geq \sqrt{2tr_t}(1+\circ(\epsilon))\right)^{1/(1+\epsilon)}}{P(N_{2p,R\alpha_t}(Z+s) \geq \sqrt{2tr_t\epsilon})}. \qquad (56)
\end{aligned}$$

Then using the fact that $Var(Z_0) = G_{R\alpha_t,\lambda_t}(0,0) \leq E[\tau] = \frac{1}{\lambda_t}$,

$$\begin{aligned}
&P\left(N_{p,R\alpha_t}(l_{R\alpha_t,\tau}) \geq t r_t\right)\\
\leq&C(\epsilon)\left(1+\frac{1}{s\sqrt{\lambda_t}}\right) \frac{P\left(N_{2p,R\alpha_t}(Z+s) \geq \sqrt{2tr_t}(1+\circ(\epsilon))\right)^{1/(1+\epsilon)}}{P(N_{2p,R\alpha_t}(Z+s) \geq \sqrt{2tr_t\epsilon})}. \qquad (57)
\end{aligned}$$

Choosing $s = \frac{\epsilon\sqrt{2tr_t\epsilon}}{(R\alpha_t)^{\frac{d}{2p}}}$, using triangle inequality and the fact that $N_{2p,R\alpha_t}(s) = s(R\alpha_t)^{\frac{d}{2p}}$, we have :

$$P\left(N_{p,R\alpha_t}(l_{R\alpha_t,\tau}) \geq t r_t\right) \leq C(\epsilon)\left(1+\frac{(R\alpha_t)^{d/2p}}{\epsilon\sqrt{2\epsilon t r_t \lambda_t}}\right) \frac{P\left(N_{2p,R\alpha_t}(Z) \geq \sqrt{2tr_t}(1+\circ(\epsilon))\right)^{1/(1+\epsilon)}}{P(N_{2p,R\alpha_t}(Z) \geq (1+\epsilon)\sqrt{2tr_t\epsilon})}$$

□

2.4. Step 4 : Large deviations for $N_{2p,R}(Z)$.

LEMME 2.5. *Let τ and $(Z_x, x \in \mathbb{T}_{R\alpha_t})$ be defined as in theorem 2.3, and $\rho_1(a,R,t)$ be defined as in proposition 1.4. Under assumptions of proposition 1.4 and theorem 1.1,*

(1) $\forall a, R, t > 0,\ \lambda_t \leq \rho_1(a,R,t) \leq aR^{d/q}\alpha_t^{d/q-2}$.

(2) $\forall a, \epsilon, R, t > 0$,

$$P\left[N_{2p,R\alpha_t}(Z) \geq \sqrt{tr_t\epsilon}\right] \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi tr_t\epsilon\rho_1(a,R,t)}}\left(1-\frac{1}{tr_t\epsilon\rho_1(a,R,t)}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}tr_t\epsilon\rho_1(a,R,t)\right).$$

(3) $\forall a, \epsilon, R, t > 0$,

$$P\left(N_{2p,R\alpha_t}(Z) \geq \sqrt{2tr_t}(1+\circ(\epsilon))\right)$$
$$\leq \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2tr_t}(1+\circ(\epsilon))+\circ(\sqrt{tr_t}))\sqrt{\pi\rho_1(a,R,t)}}\exp\left(-\frac{\rho_1(a,R,t)\left(\sqrt{2tr_t}(1+\circ(\epsilon))+\circ(\sqrt{tr_t})\right)^2}{2}\right).$$

Démonstration. (1) For the upper bound, it suffices to take $f = (R\alpha_t)^{-d/2p}$ to obtain the result. For the lower bound, we remark that $N_{2p,R\alpha_t}(h) = 1$ implies that for all $x \in \mathbb{T}_{R\alpha_t}$, $|h(x)| \leq 1$, and then $N^{2p}_{2p,R\alpha_t}(h) \leq N^2_{2,R\alpha_t}(h)$. Therefore $\rho_1(a,R,t) \geq \lambda_t$.

(2) By Hölder's inequality, for any f such that $\|f\|_{(2p)',R\alpha_t} = 1$,

$$P\left[N_{2p,R\alpha_t}(Z) \geq \sqrt{tr_t\epsilon}\right] \geq P\left[\sum_{x\in\mathbb{T}_{R\alpha_t}} f_xZ_x \geq \sqrt{tr_t\epsilon}\right].$$

Since $\sum_{x\in\mathbb{T}_{R\alpha_t}} f_xZ_x$ is a real centered Gaussian variable with variance

$$\sigma^2_{a,R,t}(f) = \sum_{x,y\in\mathbb{T}_{R\alpha_t}} G_{R\alpha_t,\lambda_t}(x,y)f_xf_y\,,$$

we have :

$$\begin{aligned} P\left[\|Z\|_{2p,R\alpha_t} \geq \sqrt{tr_t\epsilon}\right] &\geq \frac{\sigma_{a,R,t}(f)}{\sqrt{2\pi}\sqrt{tr_t\epsilon}}\left(1-\frac{\sigma^2_{a,R,t}(f)}{tr_t\epsilon}\right)\exp\left(-\frac{tr_t\epsilon}{2\sigma^2_{a,R,t}(f)}\right) \\ &\geq \frac{\sigma_{a,R,t}(f)}{\sqrt{2\pi}\sqrt{tr_t\epsilon}}\left(1-\frac{\rho_2(a,R,t)}{tr_t\epsilon}\right)\exp\left(-\frac{tr_t\epsilon}{2\sigma^2_{a,R,t}(f)}\right), \end{aligned}$$

where $\rho_2(a,R,t) = \sup\left\{\sigma^2_{a,R,t}(f), N_{(2p)',R\alpha_t}(f) = 1\right\}$. Taking the supremum over f we obtain that $\forall a, R, t, \epsilon > 0$,

$$P\left[N_{2p,R\alpha_t}(Z) \geq \sqrt{tr_t\epsilon}\right] \geq \frac{\sqrt{\rho_2(a,R,t)}}{\sqrt{2\pi tr_t\epsilon}}\left(1-\frac{\rho_2(a,R,t)}{tr_t\epsilon}\right)\exp\left(-\frac{tr_t\epsilon}{2\rho_2(a,R,t)}\right).$$

Then it suffices to prove that $\rho_2(a,R,t) = \frac{1}{\rho_1(a,R,t)}$ to have the result.

We denote by $< \cdot,\cdot >_{R\alpha_t}$ the scalar product on $l^2(\mathbb{T}_{R\alpha_t})$. On one hand, by Hölder inequality,

$$< f, G_{R\alpha_t,\lambda_t}f >_{R\alpha_t} \leq N_{2p,R\alpha_t}(G_{R\alpha_t,\lambda_t}f),\ \forall f \text{ such that } N_{(2p)',R\alpha_t}(f) = 1.$$

Since $G^{-1}_{R\alpha_t,\lambda_t} = \lambda_t - \Delta$,

$$\begin{aligned} < f, G_{R\alpha_t,\lambda_t} f >_{R\alpha_t} &=< G^{-1}_{R\alpha_t,\lambda_t} G_{R\alpha_t,\lambda_t} f, G_{R\alpha_t,\lambda_t} f >_{R\alpha_t} \\ &= \lambda_t N^2_{2,R\alpha_t}(G_{R\alpha_t,\lambda_t} f) + \frac{1}{2} N^2_{2,R\alpha_t}(\nabla G_{R\alpha_t,\lambda_t} f) \\ &\geq \rho_1(a,R,t) N^2_{2p,R\alpha_t}(G_{R\alpha_t,\lambda_t} f). \end{aligned}$$

Therefore, for all f such that $N_{(2p)',R\alpha_t}(f) = 1$, $< f, G_{R\alpha_t,\lambda_t} f >^2_{R\alpha_t} \leq \frac{<f, G_{R\alpha_t,\lambda_t} f>_{R\alpha_t}}{\rho_1(a,R,t)}$. Then, taking the supremum over f, $\rho_2(a,R,t) \leq 1/\rho_1(a,R,t)$.

On the other hand, let f_0 realizing the infimum in the definition of $\rho_1(a,R,t)$.

$$\begin{aligned} \rho_2(a,R,t) &= \sup_{N_{(2p)',R\alpha_t}(f)=1} \{< f, G_{R\alpha_t,\lambda_t} f >_{R\alpha_t}\} \\ &\geq \frac{< G^{-1}_{R\alpha_t,\lambda_t} f_0, f_0 >_{R\alpha_t}}{N^2_{(2p)',R\alpha_t}(G^{-1}_{R\alpha_t,\lambda_t} f_0)} = \frac{\rho_1(a,R,t)}{N_{(2p)',R\alpha_t}(G^{-1}_{R\alpha_t,\lambda_t} f_0)}. \end{aligned}$$

Furthermore, using the Lagrange multipliers method, we know that $N^2_{(2p)',R\alpha_t}(G^{-1}_{R\alpha_t,\lambda_t} h_0) = \rho_1(a,R,t)$. Hence $\rho_2(a,R,t) \geq 1/\rho_1(a,R,t)$, and then
$\rho_2(a,R,t) = 1/\rho_1(a,R,t)$.

(3) Let M be a median of $N_{2p,R\alpha_t}(Z)$. We can easily see that

$$\begin{aligned} &P\left(N_{2p,R\alpha_t}(Z) \geq \sqrt{2tr_t}(1+\circ(\epsilon))\right) \\ \leq &P\left(|N_{2p,R\alpha_t}(Z) - M| \geq \sqrt{2tr_t}(1+\circ(\epsilon)) - M\right). \end{aligned} \tag{58}$$

Using concentration inequalities for norms of Gaussian processes (see for instance lemma 3.1 in [**LT91**]), $\forall u > 0$,

$P\left[|N_{2p,R\alpha_t}(Z) - M| \geq \sqrt{u}\right] \leq 2P(Y \geq \sqrt{\frac{u}{\rho_2(a,R,t)}})$ where $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$. Then for $tr_t \gg M^2$,

$$\begin{aligned} &P\left(|N_{2p,R\alpha_t}(Z) - M| \geq \sqrt{2tr_t}(1+\circ(\epsilon)) - M\right) \\ \leq &2P\left(Y \geq \frac{\sqrt{2tr_t}(1+\circ(\epsilon)) - M}{\sqrt{\rho_2(a,R,t)}}\right) \\ \leq &\frac{2\sqrt{\rho_2(a,R,t)}}{(\sqrt{2tr_t}(1+\circ(\epsilon)) - M)\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(\sqrt{2tr_t}(1+\circ(\epsilon)) - M\right)^2}{2\rho_2(a,R,t)}\right). \end{aligned} \tag{59}$$

Let us now prove that under our assumptions we have $tr_t \gg M^2$. Since $M = (\mathrm{median}(\sum_{x\in\mathbb{T}_{R\alpha_t}} Z_x^{2p}))^{1/2p}$ and that for $X \geq 0$, $\mathrm{median}(X) \leq 2E[X]$, we get :

$$
\begin{aligned}
M^2 &= (\text{median}(\sum_{x\in\mathbb{T}_{R\alpha_t}} Z_x^{2p}))^{1/p} \\
&\le (2E[\sum_{x\in\mathbb{T}_{R\alpha_t}} Z_x^{2p}])^{1/p} \\
&\le C(p)(\sum_{x\in\mathbb{T}_{R\alpha_t}} G_{R\alpha_t,\lambda_t}(0,0)^p E[Y^{2p}])^{1/p}, \text{ where } Y\sim\mathcal{N}(0,1) \\
&\le C(p)(R\alpha_t)^{d/p} G_{R\alpha_t,\lambda_t}(0,0)(E[Y^{2p}])^{1/p} \\
&\le C(p)(R\alpha_t)^{d/p} G_{R\alpha_t,\lambda_t}(0,0).
\end{aligned}
$$

Recall that we have $\lambda_t = a\alpha_t^{-2}$ and $\alpha_t = r_t^{-q/d}$.
For $d=1$, by lemma 2.1, $M^2 = O(\alpha_t^{1+1/p}) = O(r_t^{-\frac{p+1}{p-1}})$. Then as $r_t \gg \frac{1}{t^{1/2q}}$ we have $M^2 \ll tr_t$.
For $d=2$, by lemma 2.1, $M^2 = O(\alpha_t^{2/p}\log\alpha_t) = O\left(r_t^{-1/(p-1)}\log\frac{1}{r_t}\right)$. Then as $r_t \gg \left(\frac{\log t}{t}\right)^{1/q}$ we have $M^2 \ll tr_t$.
For $d\ge 3$, by lemma 2.1, $M^2 \le C\alpha_t^{d/p} = Cr_t^{-1/(p-1)}$. Then as $r_t \gg t^{-1/q}$, we have $M^2 \ll tr_t$.

□

2.5. End of proof of the upper bound in theorem 1.1. Combining Lemma 2.2 and Lemma 2.4 we have proved that : $\forall\epsilon, a, R, t>0$,

$$
\begin{aligned}
&P\left[N_p(l_t)\ge tr_t\right] \\
\le& C(\epsilon)\exp(t\lambda_t)\left(1+\frac{(R\alpha_t)^{\frac{d}{2p}}}{\epsilon\sqrt{2\epsilon tr_t\lambda_t}}\right)\frac{P\left(N_{2p,R\alpha_t}(Z)\ge\sqrt{2tr_t}(1+\circ(\epsilon))\right)^{1/(1+\epsilon)}}{P\left[N_{2p,R}(Z)\ge 2\sqrt{2tr_t\epsilon}\right]}. \qquad (60)
\end{aligned}
$$

First we look for an upper bound for the numerator in (60). By 1 and 3 of lemma 2.5, we have that

$$
\begin{aligned}
&\limsup_t \frac{1}{tr_t^{2q/d}}\log P\left(N_{2p,R\alpha_t}(Z)\ge\sqrt{2tr_t}(1+\circ(\epsilon))\right)^{1/(1+\epsilon)} \\
\le& -\liminf_{t\to+\infty} r_t^{1-2q/d}\rho_1(a,R,t)(1+\circ(\epsilon)). \qquad (61)
\end{aligned}
$$

Now we work on the denominator in (60). Using 1 and 2 of lemma 2.5, we obtain :

$$
\begin{aligned}
&P\left[N_{2p,R}(Z)\ge 2\sqrt{2tr_t\epsilon}\right] \\
\ge& \frac{1}{\sqrt{16\pi tr_t\epsilon\rho_1(a,R,t)}}\left(1-\frac{1}{8tr_t\epsilon\rho_1(a,R,t)}\right)\exp\left(-4tr_t\epsilon\rho_1(a,R,t)\right) \\
\ge& \frac{1}{\sqrt{16\pi ta\epsilon R^{d/q}r_t^{2q/d}}}\left(1-\frac{1}{8tr_t\epsilon\lambda_t}\right)\exp\left(-4\epsilon atr_t^{2q/d}R^{d/q}\right)
\end{aligned}
$$

Therefore,

$$\liminf_t \frac{1}{tr_t^{2q/d}} \log P\left[N_{2p,R}(Z) \geq 2\sqrt{2tr_t\epsilon}\right] \geq -4a\epsilon R^{d/q}. \tag{62}$$

Now we combine (60),(61),(62) to have :

$$\limsup_t \frac{1}{tr_t^{2q/d}} \log P\left(N_p(l_t) \geq tr_t\right) \leq a-(1+\circ(\epsilon)) \liminf_t r_t^{1-2q/d}\rho_1(a,R,t)+4a\epsilon R^{d/q-2}.$$

Then we let $\epsilon \to 0$:

$$\limsup_t \frac{1}{tr_t^{2q/d}} \log P\left(N_p(l_t) \geq tr_t\right) \leq a - \liminf_t r_t^{1-2q/d}\rho_1(a,R,t).$$

Then we take the limit over R using proposition 1.4 :

$$\limsup_t \frac{1}{tr_t^{2q/d}} \log P\left(N_p(l_t) \geq tr_t\right) \leq a - \rho(a).$$

We finish the proof taking the infimum over $a > 0$ and using proposition 1.5.

3. Proof of the lower bound of theorem 1.1

DÉMONSTRATION. Let $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $L_t = \frac{\alpha_t^d}{t} l_t(\lfloor \alpha_t x \rfloor)$ be the rescaled version of l_t. Thanks to the work of Gantert, König and Shi (lemma 3.1 in [**GKS07**]) we know that for $R > 0$, under the sub-probability measure $P(\cdot, supp(L_t) \subset [-R,R]^d)$, L_t satisfies a large deviations principle on
$\mathcal{F} = \left\{\psi \text{ such that } \|\psi\|_2 = 1, supp(\psi) \subset [-R,R]^d\right\}$ with rate function $\mathcal{I}(\psi) = \frac{1}{2}\|\nabla\psi\|_2^2$ and speed $t\alpha_t^{-2}$.

So for $r_t = \alpha_t^{-d/q}$,

$$\begin{aligned} P(N_p(l_t) \geq tr_t) &= P(\|L_t\|_p \geq 1) \\ &\geq P(\|L_t\|_p > 1, supp(L_t) \subset [-R,R]^d). \end{aligned}$$

Then, as $\nu \to \|\nu\|_p = \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^d} f(x)d\nu(x), \|f\|_q = 1\right\}$ is a lower semi-continuous function in τ-topology, we have,

$$\liminf_{t\to+\infty} \frac{1}{tr_t^{2q/d}} \log P(N_p(l_t) \geq tr_t) \geq -\inf\left\{\frac{1}{2}\|\nabla\psi\|_2^2, \|\psi\|_2 = 1, \|\psi\|_{2p} > 1, supp(\psi) \subset [-R,R]^d\right\}.$$

Let $R \to +\infty$,

$$\begin{aligned} \liminf_{t\to+\infty} \frac{1}{tr_t^{2q/d}} \log P(N_p(l_t) \geq tr_t) &\geq -\inf\left\{\frac{1}{2}\|\nabla\psi\|_2^2, \|\psi\|_2 = 1, \|\psi\|_{2p} > 1\right\} \\ &= -\inf\left\{\frac{1}{2}\|\nabla\psi\|_2^2, \|\psi\|_2 = \|\psi\|_{2p} = 1\right\}. \end{aligned}$$

□

4. Proof of propositions 1.4 and 1.5

We denote by $\mathfrak{S}_d$ the set of the permutations on $\{1,...,d\}$, by $\lfloor\cdot\rfloor$ the integer part, by $B(s)$ the ball of radius s and by $Vol(B(s))$ its volume.

Proof of proposition 1.4 :
Let choose a sequence (R_n, t_n, h_n) such that $R_n \to +\infty$, $t_n \to +\infty$,$N_{2p,R\alpha_{t_n}}(h_n) = 1$ and such that

$$\liminf_{R\to+\infty}\liminf_{t\to+\infty}\inf\left\{\frac{a}{\alpha_t^{d/q}}N^2_{2,R\alpha_t}(h) + \frac{1}{2}\alpha_t^{2-d/q}N^2_{2,R\alpha_t}(\tilde{\nabla}h), N_{2p,R\alpha_t}(h) = 1\right\}$$
$$\geq \frac{a}{\alpha_{t_n}^{d/q}}N^2_{2,R_n\alpha_{t_n}}(h_n) + \frac{1}{2}\alpha_{t_n}^{2-d/q}N^2_{2,R_n\alpha_{t_n}}(\tilde{\nabla}h_n) - \frac{1}{n}.$$

h_n is a sequence of functions defined on $\mathbb{T}_{R_n\alpha_{t_n}}$. Note that we can assume without loose of generality that h is non-negative. We want to extend these functions to $\mathbb{R}^d$. In this perspective we split $\mathbb{Z}^d$ into cubes $C(k) = \times_{i=1}^d[k_i, k_i+1]$ for any $k \in \mathbb{Z}^d$. Then, each cube $C(k)$ is again splitted into $d!$ tetrahedra $T_\sigma(k)$, where for any $\sigma \in \mathfrak{S}_d$, $T_\sigma(k)$ is the convex hull of $k, k+e_{\sigma(1)}, ..., k+e_{\sigma(1)}+\cdots+e_{\sigma(d)}$. For any $y \in \mathbb{R}^d$ we denote by $\sigma(y)$ the unique permutation which defined the tetrahedra $T_{\sigma(y)}(\lfloor y\rfloor)$ where lives y. Set for any $x \in \mathbb{R}^d$,

$$g_n(x) = \alpha_{t_n}^{d/2p}h_n(\lfloor\alpha_{t_n}x\rfloor) + \alpha_{t_n}^{d/2p}\sum_{i=1}^d f_{n,\sigma(\alpha_{t_n}x),i}(\alpha_{t_n}x), \tag{63}$$

where $\forall y \in \mathbb{R}^d$, $\forall i \in \{1,...,d\}$, $\forall \sigma \in \mathfrak{S}^d$,

$$f_{n,\sigma,i}(y) = \big(h_n(\lfloor y\rfloor + e_{\sigma(1)} + ... + e_{\sigma(i)}) - h_n(\lfloor y\rfloor + e_{\sigma(1)} + ... + e_{\sigma(i-1)})\big)\,(y_{\sigma(i)} - \lfloor y_{\sigma(i)}\rfloor).$$

Following the work of Becker and König, it can be proved that g_n is well-defined continuous and R_n-periodic. Now we set Ψ_{R_n} a truncation function that verify $\Psi_{R_n} = \bigotimes_{i=1}^d \psi_{R_n} : \mathbb{R}^d \to [0,1]$, where $\psi_{R_n} = \begin{cases} 0 \text{ outside } [-R_n, R_n] \\ \text{linear in } [-R_n, -R_n+R_n^\epsilon] \text{ and in } [R_n - R_n^\epsilon, R_n] \\ 1 \text{ in } [-R_n+R_n^\epsilon, R_n-R_n^\epsilon]. \end{cases}$
The function $\frac{g_n\Psi_{R_n}}{\|g_n\Psi_{R_n}\|_{2p}}$ is our candidate to realize the infimum in the definition of $\rho(a)$. Therefore we have to bound from below $N_2^2(\tilde{\nabla}h_n)$ by $\|\nabla(g_n\Psi_n)\|_2^2$ and $N_2^2(h_n)$ by $\|(g_n\Psi_n)\|_2^2$.

Let us first work on the norm of the gradient. Thanks to the definition (63) of g_n, it is easy to see that

$$\|\nabla g_n\|^2_{2,R_n} = \alpha_{t_n}^{2-d/q}N^2_{2,R_n\alpha_{t_n}}(\tilde{\nabla}h_n). \tag{64}$$

By the work of Becker and König, we know that

$$\|\nabla(g_n\Psi_{R_n})\|_2^2 \leq \left(1 + \frac{1}{R_n^\epsilon}\right)\|\nabla g_n\|^2_{2,R_n} + \frac{2}{R_n^\epsilon}\|g_n\|^2_{2,R_n}. \tag{65}$$

Then we have to bound from above $\|g_n\|^2_{2,R_n}$. Using another time the definition (63) of g_n and the triangle inequality, we have that

$$\|g_n\|_{2,R_n} \leq \alpha_{t_n}^{-d/2q} N_{2,R_n\alpha_{t_n}}(h_n) + \alpha_{t_n}^{-d/2q} \left\| \sum_{i=1}^{d} f_{n,\sigma(\cdot),i}(\cdot) \right\|_{2,R_n\alpha_{t_n}}. \tag{66}$$

We bound from above now the norm of $f_{n,\sigma(y),i}(y)$ for any $y \in T_\sigma(k)$:

$$|\sum_{i=1}^{d} f_{n,\sigma(y),i}(y)|^2 \leq d \sum_{i=1}^{d} |h_n(\lfloor y \rfloor + e_{\sigma(1)} + \cdots + e_{\sigma(i)}) - h_n(\lfloor y \rfloor + e_{\sigma(1)} + \cdots + e_{\sigma(i-1)})|^2.$$

Then,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{d} f_{n,\sigma,i} \right\|^2_{2,R\alpha_{t_n}} &\leq d \sum_{k \in B(R_n\alpha_{t_n})} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(d)} \int_{y \in T_\sigma(k)} \sum_{i=1}^{d} |\tilde{\nabla}_{\sigma(i)} h_n(k + e_{\sigma(1)} + \cdots + e_{\sigma(i-1)})|^2 dy \\
&= \frac{d}{d!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(d)} \sum_{i=1}^{d} \sum_{k \in B(R_n\alpha_{t_n})} |\tilde{\nabla}_{\sigma(i)} h_n(k + e_{\sigma(1)} + \cdots + e_{\sigma(i-1)})|^2 \\
&= \frac{d}{d!} \sum_{k \in B(R_n\alpha_{t_n})} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(d)} \sum_{i=1}^{d} |\tilde{\nabla}_i h_n(k + e_1 + \cdots + e_{i-1})|^2 \\
&= d N^2_{2,R_n\alpha_{t_n}}(\tilde{\nabla}(h_n)).
\end{aligned}$$

Using (64) :

$$\left\| \sum_{i=1}^{d} f_{n,\sigma(\cdot),i}(\cdot) \right\|_{2,R_n\alpha_{t_n}} \leq \sqrt{d} N_{2,R_n\alpha_{t_n}}(\tilde{\nabla} h_n) = \frac{\sqrt{d}}{\alpha_{t_n}^{1-d/2q}} \|\nabla g_n\|_{2,R_n}. \tag{67}$$

Combining (66) and (67) we have :

$$\|g_n\|_{2,R_n} \leq \alpha_{t_n}^{-d/2q} N_{2,R_n\alpha_{t_n}}(h_n) + \sqrt{d}\alpha_{t_n}^{-1} \|\nabla g_n\|_{2,R_n}. \tag{68}$$

Putting together (64),(65) and (68), we have :

$$\begin{aligned}\|\nabla g_n\|^2_{2,R_n} \geq& \frac{R_n^\epsilon}{1+R_n^\epsilon}\|\nabla(g_n\Psi_{R_n})\|_2^2 - \frac{2}{1+R_n^\epsilon}\left(\frac{1}{\alpha_{t_n}^{d/2q}}N_{2,R_n\alpha_{t_n}}(h_n) + \frac{\sqrt{d}}{\alpha_{t_n}}\|\nabla g_n\|_{2,R_n}\right)^2 \\ \geq& \frac{R_n^\epsilon}{1+R_n^\epsilon}\|\nabla(g_n\Psi_{R_n})\|_2^2 - \frac{2}{1+R_n^\epsilon}\left(\frac{1}{\alpha_{t_n}^{d/q}}N^2_{2,R_n\alpha_{t_n}}(h_n) + \frac{d}{\alpha_{t_n}^2}\|\nabla g_n\|^2_{2,R_n}\right. \\ &\left.+\frac{2\sqrt{d}}{\alpha_{t_n}^{1+d/2q}}N_{2,R_n\alpha_{t_n}}(h_n)\|\nabla g_n\|_{2,R_n}\right) \\ \geq& \frac{R_n^\epsilon}{1+R_n^\epsilon}\|\nabla(g_n\Psi_{R_n})\|_2^2 - \frac{2}{1+R_n^\epsilon}\left(\frac{1}{\alpha_{t_n}^{d/q}}N^2_{2,R_n\alpha_{t_n}}(h_n) + \frac{d}{\alpha_{t_n}^2}\|\nabla g_n\|^2_2\right. \\ &\left.+\frac{\sqrt{d}}{\alpha_{t_n}^{1+d/2q}}N^2_{2,R_n\alpha_{t_n}}(h_n) + \frac{\sqrt{d}}{\alpha_{t_n}^{1+d/2q}}\|\nabla g_n\|^2_{2,R_n}\right).\end{aligned}$$

So,

$$\begin{aligned}&\|\nabla g_n\|^2_{2,R_n}\left(1+\frac{2}{1+R_n^\epsilon}\left(\frac{d}{\alpha_{t_n}^2}+\frac{\sqrt{d}}{\alpha_{t_n}^{1+d/q}}\right)\right) \\ \geq& \frac{R_n^\epsilon}{1+R_n^\epsilon}\|\nabla(g_n\Psi_{R_n})\|_2^2 - \frac{2}{1+R_n^\epsilon}\left(\frac{1}{\alpha_{t_n}^{d/q}}+\frac{\sqrt{d}}{\alpha_{t_n}^{1+d/2q}}\right)N^2_{2,R_n\alpha_{t_n}}(h_n).\end{aligned}$$

Then, using (64), the fact that $\alpha_{t_n}\to+\infty$ and that $1+d/2q > d/q$, we obtain :

$$\begin{aligned}\alpha_{t_n}^{2-d/q}N^2_{2,R_n\alpha_{t_n}}(\tilde{\nabla}h_n) \geq& \frac{R_n^\epsilon}{1+R_n^\epsilon+2\left(\frac{d}{\alpha_{t_n}^2}+\frac{\sqrt{d}}{\alpha_{t_n}^{1+d/q}}\right)}\|\nabla(g_n\Psi_{R_n})\|_2^2 \\ &-\frac{2}{1+R_n^\epsilon+2\left(\frac{d^2}{\alpha_{t_n}^2}+\frac{\sqrt{d}}{\alpha_{t_n}^{1+d/q}}\right)}\left(\frac{1}{\alpha_{t_n}^{d/q}}+\frac{\sqrt{d}}{\alpha_{t_n}^{1+d/2q}}\right)N^2_{2,R_n\alpha_{t_n}}(h_n) \\ \geq& \left(1-\frac{C}{R_n^\epsilon}\right)\|\nabla(g_n\Psi_{R_n})\|_2^2 - \frac{C}{\alpha_{t_n}^{d/q}R_n^\epsilon}N^2_{2,R_n\alpha_{t_n}}(h_n). \qquad (69)\end{aligned}$$

Now we work on the l_2-norm of h_n. Taking the square in (68), we have that $\forall\delta>0$,

$$\|g_n\|^2_{2,R_n} \leq (1+\frac{1}{\delta})\alpha_{t_n}^{-d/q}N^2_{2,R_n\alpha_{t_n}}(h_n) + (1+\delta)d\alpha_{t_n}^{-2}\|\nabla g_n\|^2_{2,R_n}.$$

So,

$$\begin{aligned}\alpha_{t_n}^{-d/q}N^2_{2,R_n\alpha_{t_n}}(h_n) \geq& \frac{\delta}{\delta+1}\|g_n\|^2_{2,R_n} - \delta d\alpha_{t_n}^{-2}\|\nabla g_n\|^2_{2,R_n} \\ \geq& \frac{\delta}{\delta+1}\|g_n\Psi_{R_n}\|^2_2 - \delta d\alpha_{t_n}^{-2}\|\nabla g_n\|^2_{2,R_n}. \qquad (70)\end{aligned}$$

At this point of the proof, we have bounded from below $N_2^2(\tilde{\nabla} h_n)$ by $\|\nabla(g_n\Psi_{R_n})\|_2^2$ (69) and $N_2^2(h_n)$ by $\|(g_n\Psi_{R_n})\|_2^2$ (70). Therefore, combining these two results :

$$
\begin{aligned}
&\frac{a}{\alpha_{t_n}^{d/q}} N^2_{2,R_n\alpha_{t_n}}(h_n) + \frac{1}{2}\alpha_{t_n}^{2-d/q} N^2_{2,R_n\alpha_{t_n}}(\tilde{\nabla} h_n) \\
\geq & a\left(\frac{\delta}{\delta+1}\|g_n\Psi_{R_n}\|_2^2 - \delta d\alpha_{t_n}^{-2}\|\nabla g_n\|^2_{2,R_n}\right) + \frac{1}{2}\left(1-\frac{C}{R_n^\epsilon}\right)\|\nabla(g_n\Psi_{R_n})\|_2^2 \\
& \qquad - \frac{C}{\alpha_{t_n}^{d/q} R_n^\epsilon} N^2_{2,R_n\alpha_{t_n}}(h_n) \\
\geq & \min\left(\frac{\delta}{\delta+1}, 1-\frac{C}{R_n^\epsilon}\right)\left(a\|g_n\Psi_{R_n}\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla(g_n\Psi_{R_n})\|_2^2\right) - a\delta d\alpha_{t_n}^{-2}\|\nabla g_n\|^2_{2,R_n} \\
& \qquad - C\alpha_{t_n}^{-d/q} R_n^{-\epsilon} N^2_{2,R_n\alpha_{t_n}}(h_n) \\
\geq & \min\left(\frac{\delta}{\delta+1}, 1-\frac{C}{R_n^\epsilon}\right)\rho(a)\|g_n\Psi_{R_n}\|_{2p}^2 - a\delta d\alpha_{t_n}^{-2}\|\nabla g_n\|^2_{2,R_n} \\
& \qquad - C\alpha_{t_n}^{-d/q} R_n^{-\epsilon} N^2_{2,R_n\alpha_{t_n}}(h_n). \qquad (71)
\end{aligned}
$$

Now we show that we can assume that

$$\left(1 - CR_n^{\frac{\epsilon-1}{2p}}\right)\|g_n\|_{2p,R_n} \leq \|g_n\Psi_{R_n}\|_{2p}. \qquad (72)$$

Indeed, for $a \in B_{R_n}$ let $g_{n,a}(x) = g_n(x-a)$. By periodicity of g_n, in one side we have

$$
\begin{aligned}
\int_{B_{R_n}}\int_{B_{R_n}\setminus B_{R_n-R_n^\epsilon}} g_n^{2p}(x-a)dx\, da &= \int_{B_{R_n}\setminus B_{R_n-R_n^\epsilon}}\int_{B_{R_n}} g_n^{2p}(x-a)dx\, da \\
&= \int_{B_{R_n}\setminus B_{R_n-R_n^\epsilon}}\int_{B_{R_n}} g_n^{2p}(x)dx\, da \\
&\leq CR_n^{d-1+\epsilon}\|g_n\|^{2p}_{2p,R_n},
\end{aligned}
$$

and on the opposite side we have

$$\int_{B_{R_n}}\int_{B_{R_n}\setminus B_{R_n-R_n^\epsilon}} g_n^{2p}(x-a)dx\, da \geq Vol(B(1))R_n^d \inf_{a\in B_{R_n}}\left\{\int_{B_{R_n}\setminus B_{R_n-R_n^\epsilon}} g_n^{2p}(x-a)dx\, da\right\}.$$

Therefore

$$\inf_{a\in B_{R_n}}\left\{\int_{B_{R_n}\setminus B_{R_n^\epsilon}} g_n^{2p}(x-a)dx\, da\right\} \leq CR_n^{\epsilon-1}\|g_n\|^{2p}_{2p,R_n}.$$

Remark that g_n being periodic, for any $a \in B_{R_n}$, $\|g_n\|_2 = \|g_{n,a}\|$ and $\|\nabla g_n\|_2 = \|\nabla g_{n,a}\|_2$. So we can assume (72). Hence, combining (71) and (72) we obtain :

$$
\begin{aligned}
&\frac{a}{\alpha_{t_n}^{d/q}} N^2_{2,R_n\alpha_{t_n}}(h_n) + \frac{1}{2}\alpha_{t_n}^{2-d/q} N^2_{2,R_n\alpha_{t_n}}(\tilde{\nabla} h_n) \\
\geq &\min\left(\frac{\delta}{\delta+1}, 1-\frac{C}{R_n^\epsilon}\right)\rho(a)\left\|g_n\right\|^2_{2p,R_n}\left(1 - CR_n^{\frac{\epsilon-1}{2p}}\right)^2 - a\delta d\alpha_{t_n}^{-2}\left\|\nabla g_n\right\|^2_{2,R_n} \\
&\qquad - C\alpha_{t_n}^{-d/q} R_n^{-\epsilon} N^2_{2,R_n\alpha_{t_n}}(h_n).
\end{aligned}
$$

The problem is now to eliminate the norm of g_n. Using the definition (63) of g_n and the triangle inequality, we can prove that

$$
\left\|g_n\right\|_{2p,R_n} \geq 1 - C\alpha_{t_n}^{-1}\left\|\nabla g_n\right\|_{2p,R_n}.
$$

Therefore, $\forall \gamma > 0$,

$$
(1+\gamma)\left\|g_n\right\|^2_{2p,R_n} + \frac{1+\gamma}{\gamma} C\alpha_{t_n}^{-2}\left\|\nabla g_n\right\|^2_{2p,R_n} \geq 1.
$$

Finally,

$$
\begin{aligned}
&\frac{a}{\alpha_{t_n}^{d/q}} N^2_{2,R_n\alpha_{t_n}}(h_n) + \frac{1}{2}\alpha_{t_n}^{2-d/q} N^2_{2,R_n\alpha_{t_n}}(\tilde{\nabla} h_n) \\
\geq &\min\left(\frac{\delta}{\delta+1}, 1-\frac{C}{R_n^\epsilon}\right)\left(1 - CR_n^{\frac{\epsilon-1}{2p}}\right)^2\rho(a)\left(\frac{1}{1+\gamma} - \frac{C}{\gamma\alpha_{t_n}^2}\left\|\nabla g_n\right\|^2_{2p,R_n}\right) \\
&- a\delta d\alpha_{t_n}^{-2}\left\|\nabla g_n\right\|^2_{2,R_n} - C\alpha_{t_n}^{-d/q} R_n^{-\epsilon} N^2_{2,R_n\alpha_{t_n}}(h_n).
\end{aligned}
$$

We recall that $\left\|\nabla g_n\right\|_{2,R_n} = \alpha_{t_n}^{1-d/2q} N_{2,R_n\alpha_{t_n}}(\tilde{\nabla} h_n)$. Moreover, remember that h is non-negative, as $\|h_n\|_\infty \leq 1$, then $\left\|\nabla g_n\right\|_{2p,R_n} = \alpha_{t_n} N_{2p,R_n\alpha_{t_n}}(\tilde{\nabla} h_n) \leq \alpha_{t_n} N^{1/p}_{2,R_n\alpha_{t_n}}(\tilde{\nabla} h_n)$. We deduce :

$$
\begin{aligned}
&\frac{a}{\alpha_{t_n}^{d/q}} N^2_{2,R_n\alpha_{t_n}}(h_n) + \frac{1}{2}\alpha_{t_n}^{2-d/q} N^2_{2,R_n\alpha_{t_n}}(\tilde{\nabla} h_n) \\
\geq &\min\left(\frac{\delta}{\delta+1}, 1-\frac{C}{R_n^\epsilon}\right)\left(1 - CR_n^{\frac{\epsilon-1}{2p}}\right)^2\rho(a)\left(\frac{1}{1+\gamma} - \frac{C}{\gamma} N^{2/p}_{2,R_n\alpha_{t_n}}(\tilde{\nabla} h_n)\right) \\
&- a\delta d\alpha_{t_n}^{-d/2q} N^2_{2,R_n\alpha_{t_n}}(\tilde{\nabla} h_n) - C\alpha_{t_n}^{-d/q} R_n^{-\epsilon} N^2_{2,R_n\alpha_{t_n}}(h_n).
\end{aligned}
$$

Let $n \to +\infty$, as $2 > d/q$:

$$
\begin{aligned}
&\liminf_n \frac{a}{\alpha_{t_n}^{d/q}} N^2_{2,R_n\alpha_{t_n}}(h_n) + \frac{1}{2}\alpha_{t_n}^{2-d/q} N^2_{2,R_n\alpha_{t_n}}(\tilde{\nabla} h_n) \\
= &\liminf_n \frac{a}{\alpha_{t_n}^{d/q}} N^2_{2,R_n\alpha_{t_n}}(h_n)\left(1 + \frac{C}{aR_n^\epsilon}\right) + \frac{1}{2}\alpha_{t_n}^{2-d/q} N^2_{2,R_n\alpha_{t_n}}(\tilde{\nabla} h_n)\left(1 + \frac{2ad\delta}{\alpha_{t_n}^{2-d/2q}}\right) \\
\geq &\liminf_n \min\left(\frac{\delta}{\delta+1}, 1-\frac{C}{R_n^\epsilon}\right)\left(1 - CR_n^{\frac{\epsilon-1}{2p}}\right)^2\rho(a)\left(\frac{1}{1+\gamma} - \frac{C}{\gamma} N^{2/p}_{2,R_n\alpha_{t_n}}(\tilde{\nabla} h_n)\right).
\end{aligned}
$$

In one hand, if $\alpha_{t_n}^{2-d/q} N_{2,R_n\alpha_{t_n}}(\tilde{\nabla} h_n) \to +\infty$, then the result is obvious. In the other hand, if $\alpha_{t_n}^{2-d/q} N_{2,R_n\alpha_{t_n}}(\tilde{\nabla} h_n)$ is converging, then $N_{2,R_n\alpha_{t_n}}(\tilde{\nabla} h_n) \to 0$ because $2 > d/q$, and we have :

$$\liminf_n \frac{a}{\alpha_{t_n}^{d/q}} N^2_{2,R_n\alpha_{t_n}}(h_n) + \frac{1}{2}\alpha_{t_n}^{2-d/q} N^2_{2,R_n\alpha_{t_n}}(\tilde{\nabla} h_n) \geq \min\left(\frac{\delta}{\delta+1}, 1\right)\rho(a)\frac{1}{1+\gamma}.$$

Then we let $\delta \to +\infty$ and $\gamma \to 0$ to have the result.

Proof of proposition 1.5 :
We recall that $\rho(a) = \inf\left\{a\|h\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla h\|_2^2, \|h\|_{2p} = 1\right\}$. Set $h_\beta(\cdot) = \beta^{d/2p} h(\beta\cdot)$. We remark that $\|h_\beta\|_{2p} = 1$, $\|h_\beta\|_2 = \beta^{-d/2q}\|h\|_2$ and $\|\nabla h_\beta\|_2 = \beta^{1-d/2q}\|\nabla h\|_2$. Then we minimize over β the function :

$$\Phi_h(\beta) = a\beta^{-d/q}\|h\|_2^2 + \frac{1}{2}\beta^{2-d/q}\|\nabla h\|_2^2.$$

Picking the optimal value $\beta^* = \sqrt{\frac{2ad}{2q-d}\frac{\|h\|_2}{\|\nabla h\|_2}}$ we have that

$$\rho(a) = a^{1-d/2q}\left(\frac{2q}{2q-d}\right)\left(\frac{2q-d}{2d}\right)^{d/2q} \inf\left\{\|h\|_2^{2-d/q}\|\nabla h\|_2^{d/q}, \|h\|_{2p} = 1\right\}.$$

Then optimizing over $a > 0$ the expression $\inf\{a - \rho(a), a > 0\}$ with the optimal value

$$a^* = \frac{2q-d}{2d}\inf\left\{\|h\|_2^{4q/d-2}\|\nabla h\|_2^2, \|h\|_{2p} = 1\right\}$$

we have that

$$\inf\{a - \rho(a), a > 0\} = -\inf\left\{\frac{1}{2}\|h\|_2^{4q/d-2}\|\nabla h\|_2^2, \|h\|_{2p} = 1\right\}.$$

Note that the expression is invariant by the transformation $h_\beta(\cdot) = \beta^{d/2p} h(\beta\cdot)$, therefore we can freely add the condition $\|h\|_2 = 1$. Then

$$\inf\{a - \rho(a), a > 0\} = -\inf\left\{\frac{1}{2}\|\nabla h\|_2^2, \|h\|_{2p} = \|h\|_2 = 1\right\} := -\chi_{d,p}.$$

CHAPITRE 6

Exponential moments of self-intersection local times of α-stable random walks in subcritical dimensions

In this chapter we present the proof of theorem 2.18 of Chapter 2. This theorem is a work in progress. For $(X_t, t \geq 0)$ an aperiodic, symmetric α-stable random walk, we are interested in the exponential moments for its self-intersections local times. We denote by μ the law of its increments and by A its infinitesimal generator.

1. Introduction

1.1. Preliminaries results on Fourier transform. We use four types of Fourier transforms. We give now some notations and results used throughout this article. Let us denote by $\mathbb{T}_R$ the discrete torus of radius R. For an application defined from $\mathbb{T}_R$ to $\mathbb{C}^d$, we denote by F_R its Fourier transform $F_R\left(u\right) \in (\mathbb{C}^d)^{\mathbb{T}_R}$ where

$$\forall n \in \mathbb{T}_R, F_R\left(u\right)\left(n\right) = \sum_{k \in \mathbb{T}_R} u_k \exp\left(-2i\pi \frac{< k, n >}{R}\right).$$

We have an inversion formula and a Parseval formula :

Proposition 1.1. *For an application u from $\mathbb{T}_R$ to $\mathbb{C}^d$,*

$$\forall n \in \mathbb{T}_R, u_n = \frac{1}{R^d} \sum_{k \in \mathbb{T}_R} F_R\left(u\right)\left(k\right) \exp\left(2i\pi \frac{< k, n >}{R}\right)$$

$$\text{and } \sum_{k \in \mathbb{T}_R} \left|F_R\left(u\right)\left(k\right)\right|^2 = R^d \sum_{k \in \mathbb{T}_R} \left|u(k)\right|^2.$$

For a sequence $u \in l_2(\mathbb{Z}^d)$, we denote by F its Fourier transform $F\left(u\right) \in L^2([-1/2, 1/2]^d)$:

$$\forall \omega \in [-1/2, 1/2]^d, F\left(u\right)\left(\omega\right) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} u(z) \exp\left(-2i\pi < z, \omega >\right).$$

There is an inversion and Parseval formula :

Proposition 1.2.

$$u(z) = \int_{[-1/2,1/2]^d} F\left(u\right)\left(\omega\right) \exp(2i\pi < z, \omega >) d\omega \text{ and } \left\|F\left(u\right)\right\|^2_{2,[-1/2,1/2]^d} = N_2^2(u)$$

Note that the following link between these two types of Fourier transforms is obvious. For $g \in l_2(\mathbb{Z}^d)$ considered as a sequence of $\mathbb{Z}^d$, we build its periodised version of period R : $\forall x \in \mathbb{T}_R$, $g_R(x) = \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} g(x + Rz)$. We have that

$$\forall x \in \mathbb{T}_R, F_R\left(g_R\right)\left(x\right) = F\left(g\right)\left(\frac{x}{R}\right). \tag{73}$$

For g_R a R-periodic function on $\mathbb{R}^d$, we consider its Fourier coefficients :

$$\forall n \in \mathbb{Z}^d, \mathcal{F}_R(g_R)(n) = \frac{1}{R^d} \int_{[0,R]^d} g_R(x) \exp\left(-2i\pi \frac{< n, x >}{R}\right) dx.$$

There still exists an inversion and Parseval formula :

PROPOSITION 1.3.

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ g_R(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{F}_R(g_R)(n) \exp\left(2i\pi \frac{< n, x >}{R}\right) \ \textit{and}\ N_2^2\left(\mathcal{F}_R(g_R)\right) = \frac{1}{R^d} \left\|g_R\right\|_{2,R}^2.$$

For a function $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ we denote by $\mathcal{F}(g)$ its classical Fourier transform :

$$\mathcal{F}(g) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) e^{-i2\pi < x, \omega >} d\omega.$$

Throughout this article, we are going to compare p-norms of these different type of Fourier transforms. The main tool to compare p-norms of Fourier transforms is the following Young inequalities :

PROPOSITION 1.4. *For any $p > 2$ and q its conjugate. For $u \in (\mathbb{C}^d)^{\mathbb{T}_R}$,*

$$N_{p,R}(u) \leq R^{-d/q} N_{q,R}(F_R(u)),$$

and for g_R a R-periodic function of $\mathbb{R}^d$,

$$\left\|g_R\right\|_{p,R} \leq R^{d/p} N_q(\mathcal{F}_R(g_R)).$$

These inequalities are straightforward applications of the Riesz-Thorin interpolation theorem (see Theorem 1.3.4 in [**Gra08**] for example) and Parseval formula.

1.2. Main results. Let us first introduce some notations. For β_t an application from $\mathbb{R}^+$ to $\mathbb{R}^+$, for any $a, R, t > 0$ let us note

$$\rho(a, R, t) = \inf_{h : \mathbb{T}_{R\beta_t} \to \mathbb{R}} \left\{ a\beta_t^{-\alpha} N_{2,R\beta_t}^2(h) - < h, A_{R\beta_t} h >_{R\beta_t}, N_{2p,R\beta_t}(h) = 1 \right\}, \tag{74}$$

$$\rho(a, R) = \inf_{\substack{h:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \\ R-periodic}} \left\{ a \left\|g\right\|_{2,R}^2 + R^d \sum_{z \in \mathbb{Z}^d} \left|\mathcal{F}_R(g)\,(z)\right|^2 \left|\frac{z}{R}\right|^\alpha, \left\|g\right\|_{2p,R} = 1 \right\} \tag{75}$$

$$\rho(a) = \inf_{g:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}} \left\{ a \left\|g\right\|_2^2 + \int_{\mathbb{R}^d} |\omega|^\alpha |\mathcal{F}g(\omega)|^2, \left\|g\right\|_{2p} = 1 \right\} \tag{76}$$

$$\chi_{\alpha,d,p} := \inf_{g:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |\omega|^\alpha |\mathcal{F}(g)(\omega)|^2 d\omega, \left\|g\right\|_{2p} = \left\|g\right\|_2 = 1 \right\} \tag{77}$$

$$\rho = \left(\frac{\alpha q}{\alpha q - d}\right) \left(\frac{\alpha q - d}{d}\right)^{d/\alpha q}$$
$$\inf_{g:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}} \left\{ \left\|g\right\|_2^{2(1-d/\alpha q)} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\omega|^\alpha |\mathcal{F}(g)(\omega)|^2 d\omega \right)^{d/\alpha q}, \left\|g\right\|_{2p} = 1 \right\}.$$

REMARQUE 1.5. *It is not obvious that constants $\rho(a), \chi_{\alpha,d,p}$ and ρ are not degenerate. However, Chen and Rosen have proved in* [**CR05**] *that a rewriting of $\chi_{\alpha,d,p}$ is non degenerate when $p(d-\alpha) < d$. Then it is not difficult to prove that these constants are not degenerate.*

We recall the main result of this chapter which is the same theorem than theorem 2.18 of Chapter 2. We consider an α-stable random walk $(X_t, t \geq 0)$ which means that we assume that

$$F(\mu)(\omega) \underset{0}{=} 1 - |\omega|^\alpha + o(|\omega|^\alpha),$$

where μ is the law of the increment of the random walk. For technical reasons that we have seen in Section 6.2 of Chapter 3 we have assumed that μ was satisfied assumption 2.16 which is the following :

$$\exists C_1, C_2 > 0 \text{ tels que } \forall x, y \in \mathbb{Z}^d,\ \frac{C_1}{|y-x|^{d+\alpha}} \leq \mu(y-x) \leq \frac{C_2}{|y-x|^{d+\alpha}}.$$

THÉORÈME 1.6. *Assume that $\alpha > d/q$ and that*
- for $d < \alpha$, $1 \ll \beta_t^\alpha \ll t$
- for $d = \alpha$, $1 \ll \beta_t^d \ll \frac{t}{\log(t)}$
- for $d > \alpha$, $1 \ll \beta_t^d \ll t$
then we have $\forall \theta > 0$

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\beta_t^\alpha}{t} \log E\left[\exp\left(\theta \beta_t^{d/q-\alpha} N_p(l_t)\right)\right] \leq \inf\left\{a, \liminf_{R\to+\infty} \rho(a,R) > \theta\right\}$$

PROPOSITION 1.7.

$$\liminf_{t\to+\infty} \beta_t^{\alpha-d/q} \rho(a,R,t) \geq \rho(a,R)$$

LEMME 1.8. *Behavior of $G_{R\alpha_t,\lambda_t}(0,0)$.*
Assume that $\lambda_t = a\beta_t^{-\alpha}$ and $\beta_t \gg 1$. Then for any $a, R > 0$,

1. *for $d < \alpha$, $G_{R\beta_t,\lambda_t}(0,0) = O(\beta_t^{\alpha-d})$.*
2. *for $d = \alpha$, $G_{R\beta_t,\lambda_t}(0,0) = O(\log \beta_t)$.*
3. *for $d > \alpha$, $G_{R\beta_t,\lambda_t}(0,0) = O(1)$.*

We have said this theorem is a work in progress. To have the complete result, we have just to prove that

$$\forall a > 0, \liminf_{R\to+\infty} \rho(a,R) \geq \rho(a).$$

Indeed, if we succeed to prove that, then we have

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\beta_t^\alpha}{t} \log E\left[\exp\left(\theta \beta_t^{d/q-\alpha} N_p(l_t)\right)\right] \leq \inf\left\{a, \rho(a) > \theta\right\}.$$

Moreover it is easy to see that

$$\rho(a) = a^{1-d/(\alpha q)} \rho.$$

Then

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\beta_t^\alpha}{t} \log E\left[\exp\left(\theta \beta_t^{d/q-\alpha} N_p(l_t)\right)\right] \leq \left(\frac{\theta}{\rho}\right)^{\frac{\alpha q}{\alpha q - d}}$$

which is the desired result. We use Proposition 4.1 to derive the upper bound of the large deviations :

COROLLAIRE 1.9. *$\forall \lambda > 0$,*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\beta_t^\alpha}{t} \log \mathbb{P}\left(I_t \geq \lambda t^p \beta_t^{-d(p-1)}\right) \leq -\lambda^{\alpha/(d(p-1))} \chi_{\alpha,d,p}. \tag{78}$$

This chapter is organized as follows. In Section 2 we obtain Theorem 1.6. In Section 3 we prove Proposition 1.7 and Section 4 is devoted to prove Lemma 1.8 and Proposition 4.1. Note that Lemma 1.8 is used in Section 2.4 and Proposition 1.7 in Section 2.5.

2. Proof of Theorem 1.6

2.1. Step 1 : comparison with the SILT of the random walk on the torus stopped at an exponential time.

LEMME 2.1. *Let τ be an exponential time of parameter $\lambda_t = a\beta_t^{-\alpha}$. Let $l_{R\beta_t,\tau}(x) = \int_0^\tau \delta_x(X_s^{R\beta_t})\, ds$. Then $\forall a, \theta, R, \beta_t > 0$:*

$$E\left[\exp\left(\theta\beta_t^{d/q-\alpha} N_p(l_t)\right)\right] \leq e^{t\lambda_t}\mathbb{E}\left[\exp\left(\theta\beta_t^{d/q-\alpha} N_{p,R\beta_t}(l_{R\beta_t,\tau})\right)\right]$$

DÉMONSTRATION. We deduce by convexity that

$$\begin{aligned} N_p^p(l_t) &= \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} l_t^p(x) = \sum_{x\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} l_t^p(x+kR\beta_t) \\ &\leq \sum_{x\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} l_t(x+kR\beta_t)\right)^p = \sum_{x\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} l^p_{R\beta_t,t}(x) = N^p_{p,R\beta_t}(l_{R\beta_t,t}). \end{aligned}$$

Then using the fact that $\tau \sim \mathcal{E}(\lambda_t)$ is independent of $(X_s, s \geq 0)$ we get :

$$\begin{aligned} E\left[\exp\left(\theta\beta_t^{d/q-\alpha} N_p(l_t)\right)\right]\exp(-t\lambda_t) &\leq E\left[\exp\left(\theta\beta_t^{d/q-\alpha} N_{p,R\beta_t}(l_{R\beta_t,t})\right)\right] P(\tau \geq t) \\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left(\theta\beta_t^{d/q-\alpha} N_{p,R\beta_t}(l_{R\beta_t,t})\right); \tau \geq t\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[\exp\left(\theta\beta_t^{d/q-\alpha} N_{p,R\beta_t}(l_{R\beta_t,\tau})\right)\right] \end{aligned}$$

Finally, $E\left[\exp\left(\theta\beta_t^{d/q-\alpha} N_p(l_t)\right)\right] \leq e^{t\lambda_t}\mathbb{E}\left[\exp\left(\theta\beta_t^{d/q-\alpha} N_{p,R\beta_t}(l_{R\beta_t,\tau})\right)\right]$.

□

2.2. Step 2 : the Eisenbaum isomorphism theorem.

THÉORÈME 2.2. *(Eisenbaum, see for instance corollary 8.1.2 page 364 in* [**MR06**]*). Let τ be as in lemma 2.1 and let $(Z_x, x \in \mathbb{T}_{R\beta_t})$ be a centered Gaussian process with covariance matrix $G_{R\beta_t,\lambda_t}(x,y) = E_x\left[\int_0^\tau \delta_y(X_s^{R\beta_t})ds\right]$ independent of τ and of the random walk $(X_s, s \geq 0)$. For $s \neq 0$, consider the process $S_x := l_{R\beta_t,\tau}(x) + \frac{1}{2}(Z_x+s)^2$. Then for all measurable and bounded function $F : \mathbb{R}^{\mathbb{T}_{R\beta_t}} \mapsto \mathbb{R}$:*

$$E\left[F((S_x; x \in \mathbb{T}_{R\beta_t}))\right] = E\left[F\left((\frac{1}{2}(Z_x+s)^2; x \in \mathbb{T}_{R\beta_t})\right)\left(1+\frac{Z_0}{s}\right)\right].$$

2.3. Step 3 : Comparison between $N_{p,R\beta_t}(l_{R\beta_t,\tau})$ and $N_{2p,R\beta_t}(Z)$.

LEMME 2.3. *Let τ and $(Z_x, x \in \mathbb{T}_{R\beta_t})$ be defined as in theorem 2.2. $\forall \theta, \gamma, \epsilon > 0$ such that $\theta(1+\epsilon) < \gamma$*

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\theta\beta_t^{d/q-\alpha}N_{p,R\beta_t}(l_{R\beta_t,\tau})\right)\right]$$

$$\leq 1 + C(\epsilon,\theta,\gamma)\left(1+\frac{R^{d/(2p)}\beta_t^{(d+\alpha)/2}}{\epsilon\sqrt{2at}}\right)\exp\left(\gamma t\epsilon\beta_t^{-\alpha}\right)\frac{E\left[\exp\left(\frac{\gamma(1+\epsilon)}{2}\beta_t^{d/q-\alpha}N^2_{2p,R\beta_t}(Z)\right)\right]^{1/(1+\epsilon)}}{P\left(N_{2p,R\beta_t}(Z)\geq\sqrt{2t\epsilon}\beta_t^{-d/(2q)}(1+\sqrt{\epsilon})\right)}$$

DÉMONSTRATION.

$$S_x := l_{R\beta_t,\tau}(x) + \frac{1}{2}(Z_x+s)^2 \Rightarrow S_x^p \geq l^p_{R\beta_t,\tau}(x) + \left(\frac{1}{2}(Z_x+s)^2\right)^p$$

$$\Rightarrow N^p_{p,R\beta_t}(S) \geq N^p_{p,R\beta_t}(l_{R\beta_t,\tau}) + \frac{1}{2^p}N^{2p}_{2p,R\beta_t}(Z+s).$$

By independence of $(Z_x, x \in \mathbb{T}_{R\beta_t})$ with the random walk $(X_s, s \geq 0)$ and the exponential time τ, we have $\forall\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
&P\left(N^p_{p,R\beta_t}(l_{R\beta_t,\tau}) \geq y^p t^p \beta_t^{d(1-p)}\right) P\left(\frac{1}{2^p}N^{2p}_{2p,R\beta_t}(Z+s) \geq t^p\beta_t^{d(1-p)}\epsilon^p\right)\\
=&P\left(N^p_{p,R\beta_t}(l_{R\beta_t,\tau}) \geq y^p t^p \beta_t^{d(1-p)}, \frac{1}{2^p}N^{2p}_{2p,R\beta_t}(Z+s) \geq t^p\beta_t^{d(1-p)}\epsilon^p\right)\\
\leq&P\left(N^p_{p,R\beta_t}(l_{R\beta_t,\tau}) + \frac{1}{2^p}N^{2p}_{2p,R\beta_t}(Z+s) \geq t^p\beta_t^{d(1-p)}(y^p+\epsilon^p)\right)\\
\leq&P\left(N^p_{p,R\beta_t}(S) \geq t^p\beta_t^{d(1-p)}(y^p+\epsilon^p)\right)\\
=&E\left[\left(1+\frac{Z_0}{s}\right); \frac{1}{2^p}N^{2p}_{2p,R\beta_t}(Z+s) \geq t^p\beta_t^{d(1-p)}(y^p+\epsilon^p)\right]
\end{aligned}\tag{79}$$

where the last equality comes from Theorem 2.2. Moreover by Hölder's inequality, $\forall\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
&E\left[\left(1+\frac{Z_0}{s}\right); \frac{1}{2^p}N^{2p}_{2p,R\beta_t}(Z+s) \geq t^p\beta_t^{d(1-p)}(y^p+\epsilon^p)\right]\\
\leq&E\left[\left|1+\frac{Z_0}{s}\right|^{1+1/\epsilon}\right]^{\epsilon/(1+\epsilon)} P\left(N^{2p}_{2p,R\beta_t}(Z+s) \geq 2^p t^p\beta_t^{d(1-p)}(y^p+\epsilon^p)\right)^{1/(1+\epsilon)}.
\end{aligned}\tag{80}$$

Combining (79) and (80) we obtain that $\forall a, \epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
&P\left(N_{p,R\beta_t}(l_{R\beta_t,\tau}) \geq yt\beta_t^{-d/q}\right)\\
\leq&E\left[\left|1+\frac{Z_0}{s}\right|^{1+1/\epsilon}\right]^{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}}\frac{P\left(N_{2p,R\beta_t}(Z+s)\geq\sqrt{2t}\beta_t^{-d/(2q)}(y^p+\epsilon^p)^{1/(2p)}\right)^{\frac{1}{1+\epsilon}}}{P(N_{2p,R\beta_t}(Z+s)\geq\sqrt{2t\epsilon}\beta_t^{-d/(2q)})}.
\end{aligned}\tag{81}$$

Then using the fact that $Var(Z_0) = G_{R\beta_t,\lambda_t}(0,0) \leq E[\tau] = \frac{1}{\lambda_t}$,

$$\begin{aligned}
&P\left(N_{p,R\beta_t}(l_{R\beta_t,\tau}) \geq yt\beta_t^{-d/q}\right)\\
\leq& C(\epsilon)\left(1+\frac{1}{s\sqrt{\lambda_t}}\right)\frac{P\left(N_{2p,R\beta_t}(Z+s) \geq \sqrt{2t}\beta_t^{-d/(2q)}(y^p+\epsilon^p)^{1/(2p)}\right)^{1/(1+\epsilon)}}{P(N_{2p,R\beta_t}(Z+s) \geq \sqrt{2t\epsilon}\beta_t^{-d/(2q)})}
\end{aligned} \tag{82}$$

But by Markov inequality,

$$\begin{aligned}
&P\left(N_{2p,R\beta_t}(Z+s) \geq \sqrt{2t}\beta_t^{-d/(2q)}(y^p+\epsilon^p)^{1/(2p)}\right)\\
\leq& \exp\left(-\gamma t\beta_t^{-\alpha}(y^p+\epsilon^p)^{1/p}\right) E\left[\exp\left(\frac{\gamma}{2}\beta_t^{d/q-\alpha}N^2_{2p,R\beta_t}(Z+s)\right)\right]
\end{aligned}$$

then

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\exp\left(\theta\beta_t^{d/q-\alpha}N_{p,R\beta_t}(l_{R\beta_t,\tau})\right)\right]\\
=&1+\int_1^{+\infty} P\left(\exp\left(\theta\beta_t^{d/q-\alpha}N_{p,R\beta_t}(l_{R\beta_t,\tau})\right) \geq y\right)dy\\
=&1+\int_0^{+\infty} P\left(N_{p,R\beta_t}(l_{R\beta_t,\tau}) \geq yt\beta_t^{-d/q}\right)\theta t\beta_t^{-\alpha}\exp(\theta ty\beta_t^{-\alpha})dy\\
\leq&1+C(\epsilon)\left(1+\frac{1}{s\sqrt{\lambda_t}}\right)\frac{E\left[\exp\left(\frac{\gamma}{2}\beta_t^{d/q-\alpha}N^2_{2p,R\beta_t}(Z+s)\right)\right]^{1/(1+\epsilon)}}{P(N_{2p,R\beta_t}(Z+s) \geq \sqrt{2t\epsilon}\beta_t^{-d/(2q)})}\\
&\int_0^{+\infty}\exp\left(-\gamma t\beta_t^{-\alpha}\frac{(y^p+\epsilon^p)^{1/p}}{1+\epsilon}\right)\theta t\beta_t^{-\alpha}\exp(\theta ty\beta_t^{-\alpha})dy.
\end{aligned}$$

Remark that the integral is finite if and only if $\theta < \frac{\gamma}{1+\epsilon}$. In this case

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\exp\left(\theta\beta_t^{d/q-\alpha}N_{p,R\beta_t}(l_{R\beta_t,\tau})\right)\right]\\
\leq&1+C(\epsilon,\theta,\gamma)\left(1+\frac{1}{s\sqrt{\lambda_t}}\right)\frac{E\left[\exp\left(\frac{\gamma}{2}\beta_t^{d/q-\alpha}N^2_{2p,R\beta_t}(Z+s)\right)\right]^{1/(1+\epsilon)}}{P(N_{2p,R\beta_t}(Z+s) \geq \sqrt{2t\epsilon}\beta_t^{-d/(2q)})}
\end{aligned}$$

Choosing $s = \frac{\epsilon\sqrt{2t}}{R^{\frac{d}{2p}}\beta_t^{d/2}}$, using triangle inequality and the fact that $N_{2p,R\beta_t}(s) = s(R\beta_t)^{\frac{d}{2p}}$, we have :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\exp\left(\theta\beta_t^{d/q-\alpha}N_{p,R\beta_t}(l_{R\beta_t,\tau})\right)\right]\\
\leq&1+C(\epsilon,\theta,\gamma)\left(1+\frac{R^{d/(2p)}\beta_t^{(d+\alpha)/2}}{\epsilon\sqrt{2at}}\right)\exp\left(\gamma t\epsilon\beta_t^{-\alpha}\right)\\
&\frac{E\left[\exp\left(\frac{\gamma(1+\epsilon)}{2}\beta_t^{d/q-\alpha}N^2_{2p,R\beta_t}(Z)\right)\right]^{1/(1+\epsilon)}}{P\left(N_{2p,R\beta_t}(Z) \geq \sqrt{2t\epsilon}\beta_t^{-d/(2q)}(1+\sqrt{\epsilon})\right)}
\end{aligned}$$

□

2.4. Step 4 : Large deviations for $N_{2p,R}(Z)$.

LEMME 2.4. *Let τ and $(Z_x, x \in \mathbb{T}_{R\beta_t})$ be defined as in theorem 2.2, and $\rho(a,R,t)$ be defined by (74). Under assumptions of theorem 1.6,*

(1) $\forall a, R, t > 0,\ \lambda_t \le \rho(a,R,t) \le aR^{d/q}\beta_t^{d/q-\alpha}$.

(2) $\forall a, \epsilon, R, t > 0,$

$$P\left[N_{2p,R\beta_t}(Z) \ge \sqrt{t\epsilon}\beta_t^{-d/(2q)}\right] \ge \frac{\beta_t^{d/(2q)}}{\sqrt{2\pi t\epsilon\rho(a,R,t)}}\left(1 - \frac{\beta_t^{d/(2q)}}{t\epsilon\rho(a,R,t)}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}t\beta_t^{-d/q}\epsilon\rho(a,R,t)\right).$$

(3) $\exists C > 0$ *such that* $\forall a, \gamma, \epsilon, R, t > 0$ *such that* $\gamma(1+\epsilon)^2 < \rho(a,R,t)\beta_t^{\alpha-d/q}$

$$E\left[\exp\left(\frac{\gamma(1+\epsilon)}{2}\beta_t^{d/q-\alpha}N^2_{2p,R\beta_t}(Z)\right)\right] \le \left(1 + \frac{C}{1 - \frac{\rho(a,R,t)}{\gamma(1+\epsilon)^2\beta_t^{d/q-\alpha}}}\right)\exp\left(\frac{\gamma(1+\epsilon)^2}{2\epsilon}o_t(t\beta_t^{-\alpha})\right)$$

DÉMONSTRATION. (1) For the upper bound, it suffices to take $f = (R\beta_t)^{-d/2p}$ in 74 to obtain the result. For the lower bound, we remark that $N_{2p,R\beta_t}(h) = 1$ implies that for all $x \in \mathbb{T}_{R\beta_t}$, $|h(x)| \le 1$, and then $N^{2p}_{2p,R\beta_t}(h) \le N^2_{2,R\beta_t}(h)$. Therefore $\rho(a,R,t) \ge \lambda_t$.

(2) By Hölder's inequality, for any f such that $\|f\|_{(2p)',R\beta_t} = 1$,

$$P\left[N_{2p,R\beta_t}(Z) \ge \sqrt{t\epsilon}\beta_t^{-d/(2q)}\right] \ge P\left[\sum_{x\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} f_x Z_x \ge \sqrt{t\epsilon}\beta_t^{-d/(2q)}\right].$$

Since $\sum_{x\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} f_x Z_x$ is a real centered Gaussian variable with variance

$$\sigma^2_{a,R,t}(f) = \sum_{x,y\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} G_{R\beta_t,\lambda_t}(x,y) f_x f_y\,,$$

we have :

$$\begin{aligned}
&P\left[\|Z\|_{2p,R\beta_t} \ge \sqrt{t\epsilon}\beta_t^{-d/(2q)}\right] \\
\ge&\frac{\sigma_{a,R,t}(f)\beta_t^{d/(2q)}}{\sqrt{2\pi t\epsilon}}\left(1 - \frac{\sigma^2_{a,R,t}(f)\beta_t^{d/q}}{t\epsilon}\right)\exp\left(-\frac{t\beta_t^{-d/q}\epsilon}{2\sigma^2_{a,R,t}(f)}\right) \\
\ge&\frac{\sigma_{a,R,t}(f)\beta_t^{d/(2q)}}{\sqrt{2\pi t\epsilon}}\left(1 - \frac{\rho_1(a,R,t)\beta_t^{d/q}}{t\epsilon}\right)\exp\left(-\frac{t\beta_t^{-d/q}\epsilon}{2\sigma^2_{a,R,t}(f)}\right),
\end{aligned}$$

where $\rho_1(a,R,t) = \sup\left\{\sigma^2_{a,R,t}(f), N_{(2p)',R\beta_t}(f) = 1\right\}$. Taking the supremum over f we obtain that $\forall a, R, t, \epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
&P\left[N_{2p,R\beta_t}(Z) \geq \sqrt{t\epsilon}\beta_t^{-d/(2q)}\right] \\
\geq &\frac{\sqrt{\rho_1(a,R,t)}\beta_t^{d/(2q)}}{\sqrt{2\pi t\epsilon}}\left(1 - \frac{\rho_1(a,R,t)\beta_t^{d/q}}{t\epsilon}\right)\exp\left(-\frac{t\beta_t^{-d/q}\epsilon}{2\rho_1(a,R,t)}\right).
\end{aligned}$$

Then it suffices to prove that $\rho_1(a,R,t) = \frac{1}{\rho(a,R,t)}$ to have the result.

We denote by $< \cdot, \cdot >_{R\beta_t}$ the scalar product on $l^2(\mathbb{T}_{R\beta_t})$. On one hand, by Hölder inequality,

$$< f, G_{R\beta_t,\lambda_t} f >_{R\beta_t} \leq N_{2p,R\beta_t}(G_{R\beta_t,\lambda_t} f), \ \forall f \text{ such that } N_{(2p)',R\beta_t}(f) = 1.$$

Since $G^{-1}_{R\beta_t,\lambda_t} = \lambda_t - A_{R\beta_t}$,

$$\begin{aligned}
< f, G_{R\beta_t,\lambda_t} f >_{R\beta_t} &=< G^{-1}_{R\beta_t,\lambda_t} G_{R\beta_t,\lambda_t} f, G_{R\beta_t,\lambda_t} f >_{R\beta_t} \\
&= \lambda_t N^2_{2,R\beta_t}(G_{R\beta_t,\lambda_t} f) - < A_{R\beta_t} G_{R\beta_t,\lambda_t} f, G_{R\beta_t,\lambda_t} f > \\
&\geq \rho(a,R,t) N^2_{2p,R\beta_t}(G_{R\beta_t,\lambda_t} f).
\end{aligned}$$

Therefore, for all f such that $N_{(2p)',R\beta_t}(f) = 1$, $< f, G_{R\beta_t,\lambda_t} f >^2_{R\beta_t} \leq \frac{< f, G_{R\beta_t,\lambda_t} f >_{R\beta_t}}{\rho(a,R,t)}$. Then, taking the supremum over f, $\rho_1(a,R,t) \leq 1/\rho(a,R,t)$.

On the other hand, let f_0 achieving the infimum in the definition of $\rho(a,R,t)$.

$$\begin{aligned}
\rho_1(a,R,t) &= \sup_{N_{(2p)',R\beta_t}(f)=1} \{< f, G_{R\beta_t,\lambda_t} f >_{R\beta_t}\} \\
&\geq \frac{< G^{-1}_{R\beta_t,\lambda_t} f_0, f_0 >_{R\beta_t}}{N^2_{(2p)',R\beta_t}(G^{-1}_{R\beta_t,\lambda_t} f_0)} = \frac{\rho(a,R,t)}{N^2_{(2p)',R\beta_t}(G^{-1}_{R\beta_t,\lambda_t} f_0)}.
\end{aligned}$$

Furthermore, using the Lagrange multipliers method, we know that $N_{(2p)',R\beta_t}(G^{-1}_{R\beta_t,\lambda_t} f_0) = \rho(a,R,t)$. Hence $\rho_1(a,R,t) \geq 1/\rho(a,R,t)$, and then $\rho_1(a,R,t) = 1/\rho(a,R,t)$.

(3) Let M be a median of $N_{2p,R\beta_t}(Z)$. We can easily see that

$$\begin{aligned}
&E\left[\exp\left(\frac{\gamma(1+\epsilon)}{2}\beta_t^{d/q-\alpha} N^2_{2p,R\beta_t}(Z)\right)\right] \\
\leq &E\left[\exp\left(\frac{\gamma(1+\epsilon)^2}{2}\beta_t^{d/q-\alpha}|N_{2p,R\beta_t} - M|^2\right)\right]\exp\left(\frac{\gamma(1+\epsilon)^2}{2\epsilon}\beta_t^{d/q-\alpha} M^2\right)
\end{aligned}$$

Let us now prove that under our assumptions we have $\beta_t^{d/q-\alpha} M^2 = o(t\beta_t^{-\alpha})$ which is equivalent to $M^2 = o(t\beta_t^{-d/q})$. Since $M = \left(\text{median}\left(\sum_{x\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} Z_x^{2p}\right)\right)^{1/2p}$

and that for $X \geq 0$, $\operatorname{median}(X) \leq 2E[X]$, we get :

$$
\begin{aligned}
M^2 &= \left(\operatorname{median}\left(\sum_{x\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} Z_x^{2p}\right)\right)^{1/p} \\
&\leq \left(2E\left[\sum_{x\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} Z_x^{2p}\right]\right)^{1/p} \\
&\leq C(p)\left(\sum_{x\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} G_{R\beta_t,\lambda_t}(0,0)^p E\left[Y^{2p}\right]\right)^{1/p}, \text{ where } Y \sim \mathcal{N}(0,1) \\
&\leq C(p)(R\beta_t)^{d/p} G_{R\beta_t,\lambda_t}(0,0)(E[Y^{2p}])^{1/p} \\
&\leq C(p)(R\beta_t)^{d/p} G_{R\beta_t,\lambda_t}(0,0).
\end{aligned}
$$

Recall that we have $\lambda_t = a\beta_t^{-\alpha}$.
For $d < \alpha$, by lemma 1.8, $M^2 = O(\beta_t^{\alpha-d/q})$. Then as $\beta_t^\alpha \ll t$ we have $M^2 = o(t\beta_t^{-d/q})$.
For $d = \alpha$, by lemma 1.8, $M^2 = O(\beta_t^{d/p}\log\beta_t)$. Then as $\beta_t^d \ll \frac{t}{\log(t)}$ we have $M^2 = o(t\beta_t^{-d/q})$.
For $d > \alpha$, by lemma 1.8, $M^2 = O(\beta_t^{d/p})$. Then as $\beta^d \ll t$, we have $M^2 = o(t\beta_t^{-d/q})$.

Let us now work on the expectation.

$$
\begin{aligned}
&E\left[\exp\left(\frac{\gamma(1+\epsilon)^2}{2}\beta_t^{d/q-\alpha}|N_{2p,R\beta_t} - M|^2\right)\right] \\
=&1 + \int_1^{+\infty} P\left(\exp\left(\frac{\gamma(1+\epsilon)^2}{2}\beta_t^{d/q-\alpha}|N_{2p,R\beta_t} - M|^2\right) > y\right) dy \\
=&1 + \int_0^{+\infty} \frac{\gamma(1+\epsilon)^2}{2}\beta_t^{d/q-\alpha} \exp\left(\frac{\gamma(1+\epsilon)^2}{2}\beta_t^{d/q-\alpha} y\right) P(|N_{2p,R\beta_t}(Z) - M|^2 > y)dy
\end{aligned}
$$

Using concentration inequalities for norms of Gaussian processes (see for instance lemma 3.1 in [**LT91**]), $\forall u > 0$,

$$P\left(|N_{2p,R\beta_t}(Z)-M|\geq\sqrt{u}\right)\leq 2P\left(Y\geq\sqrt{\frac{u}{\rho_1(a,R,t)}}\right)=2P\left(Y\geq\sqrt{u\rho(a,R,t)}\right)$$

where $Y\sim\mathcal{N}(0,1)$. Then

$$\begin{aligned}
&E\left[\exp\left(\frac{\gamma(1+\epsilon)^2}{2}\beta_t^{d/q-\alpha}|N_{2p,R\beta_t}-M|^2\right)\right]\\
\leq&1+\int_0^{+\infty}\gamma(1+\epsilon)^2\beta_t^{d/q-\alpha}\exp\left(\frac{\gamma(1+\epsilon)^2}{2}\beta_t^{d/q-\alpha}y\right)P\left(Y\geq\sqrt{y\rho(a,R,t)}\right)dy\\
\leq&1+C\int_0^{+\infty}\gamma(1+\epsilon)^2\beta_t^{d/q-\alpha}\exp\left(\frac{\gamma(1+\epsilon)^2}{2}\beta_t^{d/q-\alpha}y\right)\exp\left(-\frac{y\rho(a,R,t)}{2}\right)\\
=&1+\frac{C}{1-\frac{\rho(a,R,t)}{\gamma(1+\epsilon)^2\beta_t^{d/q-\alpha}}}\text{ ,if }\gamma<\rho(a,R,t)\frac{\beta_t^{\alpha-d/q}}{(1+\epsilon)^2}.
\end{aligned}$$

□

2.5. End of proof of upper bound of theorem 1.6. By lemma 2.1 we have that :

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{\beta_t^\alpha}{t}\log E\left[\exp\left(\theta\beta_t^{d/q-\alpha}N_p(l_t)\right)\right]\leq a+\limsup_{t\to+\infty}\frac{\beta_t^\alpha}{t}\mathbb{E}\left[\exp\left(\theta\beta_t^{d/q-\alpha}N_{p,R\beta_t}(l_{R\beta_t,\tau})\right)\right].\tag{83}$$

Then by lemma 2.3, for $\theta(1+\epsilon)<\gamma$

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t\to+\infty}\frac{\beta_t^\alpha}{t}\log\mathbb{E}\left[\exp\left(\theta\beta_t^{d/q-\alpha}N_{p,R\beta_t}(l_{R\beta_t,\tau})\right)\right]\\
\leq&\epsilon\gamma+\frac{1}{1+\epsilon}\limsup_{t\to+\infty}\frac{\beta_t^\alpha}{t}\log E\left[\exp\left(\frac{\gamma(1+\epsilon)}{2}\beta_t^{d/q-\alpha}N^2_{2p,R\beta_t}(Z)\right)\right]\\
&-\liminf_{t\to+\infty}\frac{\beta_t^\alpha}{t}\log P\left(N_{2p,R\beta_t}(Z)\geq\sqrt{2t\epsilon}\beta_t^{-d/(2q)}(1+\sqrt{\epsilon})\right).
\end{aligned}\tag{84}$$

Moreover, by 1 and 3 of lemma 2.4, for $\gamma(1+\epsilon)^2<\liminf_{t\to+\infty}\beta_t^{\alpha-d/q}\rho(a,R,t)$

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{\beta_t^\alpha}{t}\log E\left[\exp\left(\frac{\gamma(1+\epsilon)}{2}\beta_t^{d/q-\alpha}N^2_{2p,R\beta_t}(Z)\right)\right]\leq 0,\tag{85}$$

and by 1 and 2 of lemma 2.4,

$$\liminf_{t\to+\infty}\frac{\beta_t^\alpha}{t}\log P\left(N_{2p,R\beta_t}(Z)\geq\sqrt{2t\epsilon}\beta_t^{-d/(2q)}(1+\sqrt{\epsilon})\right)\geq -a\epsilon(1+\sqrt{\epsilon})^2R^{d/q}.\tag{86}$$

Finally, for $\theta(1+\epsilon)<\gamma$ and $\gamma(1+\epsilon)^2<\liminf_{t\to+\infty}\rho(a,R,t)\beta_t^{d/q-\alpha}$,

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{\beta_t^\alpha}{t}\log E\left[\exp\left(\theta\beta_t^{\alpha-d/q}N_p(l_t)\right)\right]\leq a+\epsilon\gamma+a\epsilon(1+\sqrt{\epsilon})^2R^{d/q}.\tag{87}$$

Then we make $\epsilon \to 0$. As $\liminf_{t\to+\infty} \beta_t^{\alpha-d/q}\rho(a,R,t) \geq \rho(a,R)$, for $\theta < \gamma$ and $\gamma < \rho(a,R)$ we have

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\beta_t^\alpha}{t} \log E\left[\exp\left(\theta\beta_t^{d/q-\alpha} N_p(l_t)\right)\right] \leq a. \tag{88}$$

We make $\gamma \to \rho(a,R)$ and take the limit over R. Then we have for any $\theta > 0$

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\beta_t^\alpha}{t} \log E\left[\exp\left(\theta\beta_t^{d/q-\alpha} N_p(l_t)\right)\right] \leq \inf\left\{a,\ \liminf_{R\to+\infty} \rho(a,R) > \theta\right\} \tag{89}$$

3. Proof of Proposition 1.7

3.1. Rewriting of $\rho(a,R,t)$. Let us rewrite $\rho(a,R,t)$ defined by (74) in terms of Fourier transform. Let h be the function achieving the infimum in the definition of $\rho(a,R,t)$ (74)

$$\begin{aligned}
&< h, A_{R\beta_t} h >_{R\beta_t}\\
=&\sum_{x\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} h(x) \sum_{y\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} \mu_{R\beta_t}(y-x)(h(y)-h(x))\\
=&-N^2_{2,R\beta_t}(h) + \sum_{x\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} \sum_{y\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} h(x)\mu_{R\beta_t}(y-x)h(y)\\
=&-\frac{1}{(R\beta_t)^d} N^2_{2,R\beta_t}(F_{R\beta_t}(h))\\
&+\sum_{x\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} \sum_{y\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} h(x)h(y) \sum_{z\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} \frac{1}{(R\beta_t)^d} F_{R\beta_t}(\mu_{R\beta_t})(z) \exp\left(2i\pi\frac{< z, y-x >_{R\beta_t}}{R\beta_t}\right)\\
=&-\frac{1}{(R\beta_t)^d} N^2_{2,R\beta_t}(F_{R\beta_t}(h)) + \frac{1}{(R\beta_t)^d} \sum_{z\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} |F_{R\beta_t}(h)(z)|^2 F_{R\beta_t}(\mu_{R\beta_t})(z)\\
=&\frac{1}{(R\beta_t)^d} \sum_{z\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} |F_{R\beta_t}(h)(z)|^2 \left(F(\mu)\left(\frac{z}{R\beta_t}\right) - 1\right).
\end{aligned}$$

We have shown that

$$\beta_t^{\alpha-d/q}\rho(a,R,t) = a\beta_t^{-\frac{d}{q}} N^2_{2,R\beta_t}(h) + \frac{\beta_t^{\alpha-\frac{d}{q}}}{(R\beta_t)^d} \sum_{z\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} |F_{R\beta_t}(h)(z)|^2 (1 - F(\mu)(\frac{z}{R\beta_t})). \tag{90}$$

We call

$$a\beta_t^{-\frac{d}{q}} N^2_{2,R\beta_t}(h)$$

the 2-norm part and

$$\frac{\beta^{\alpha-\frac{d}{q}}}{(R\beta_t)^d} \sum_{z\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} |F_{R\beta_t}(h)(z)|^2 \left(1 - F(\mu)\left(\frac{z}{R\beta_t}\right)\right)$$

the gradient part.

We set

$$g_R(x) = \beta_t^{d/(2p)} \sum_{k\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} h(k)\varphi(\beta_t x - k)$$

where φ is a $R\beta_t$-periodic function such that

$$\mathcal{F}_{R\beta_t}(\varphi)(n) = \frac{1}{(R\beta_t)^d} \frac{\sqrt{1 - F\left(\mu\right)\left(\frac{n}{R\beta_t}\right)}}{|\frac{n}{R\beta_t}|^{\alpha/2}} \; \mathbb{I}_{n\in\mathbb{T}_{R\beta_t}}.$$

Thus g_R is a R-periodic function of $\mathbb{R}^d$ and

$$\mathcal{F}_R(g_R)(n) = \beta_t^{d/(2p)} F_{R\beta_t}(h)(n)\mathcal{F}_{R\beta_t}(\varphi)(n).$$

Our candidate to achieve the infimum in the definition (75) of $\rho(a, R)$ is the function g defined as the normalized function g_R :

$$g = \frac{g_R}{\|g_R\|_{2p,R}}.$$

3.2. Gradient part. The function g_R is built to preserve the gradient part. Indeed,

$$\begin{aligned}
&\frac{\beta_t^{\alpha-\frac{d}{q}}}{(R\beta_t)^d} \sum_{z\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} \left|F_{R\beta_t}\left(h\right)\left(z\right)\right|^2 \left(1 - F\left(\mu\right)\left(\frac{z}{R\beta_t}\right)\right) \\
=&\frac{\beta_t^{\alpha-\frac{d}{q}}}{(R\beta_t)^d} \sum_{z\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} \left|F_{R\beta_t}\left(h\right)\left(z\right)\right|^2 \mathcal{F}_{R\beta_t}(\varphi)(z)^2 (R\beta_t)^{2d} \left|\frac{z}{R\beta_t}\right|^{\alpha} \\
=&\beta_t^{-d/q}(R\beta_t)^d \sum_{z\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} \left|F_{R\beta_t}\left(h\right)\left(z\right)\right|^2 \mathcal{F}_{R\beta_t}(\varphi)(z)^2 \left|\frac{z}{R}\right|^{\alpha} \\
=&R^d \sum_{z\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} \left|\mathcal{F}_R(g_R)(z)\right|^2 \left|\frac{z}{R}\right|^{\alpha}. \qquad (91)
\end{aligned}$$

3.3. **2-norm part.** Note that by symmetry of μ, $\bar{F}(\mu) = F(\mu)$. Then $F(\mu)$ is real and $1 - F(\mu) \geq 0$. By Parseval equality,

$$
\begin{aligned}
&\|g_R\|_{2,R}^2 \\
=&R^d N_2^2(\mathcal{F}_R(g_R)) \\
=&R^d \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} |\mathcal{F}_R(g_R)(z)|^2 \\
=&R^d \sum_{z\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} \beta_t^{d/p} \left|F_{R\beta_t}(h)(z)\right|^2 \frac{1}{(R\beta_t)^{2d}} \frac{\left(1 - F(\mu)\left(\frac{z}{R\beta_t}\right)\right)}{\left|\frac{z}{R\beta_t}\right|^\alpha} \\
=&\frac{R^d\beta_t^{d/p}}{(R\beta_t)^{2d}} N_{2,R\beta_t}^2(F_{R\beta_t}(h)) + \frac{R^d\beta_t^{d/p}}{(R\beta_t)^{2d}} \sum_{z\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} \left|F_{R\beta_t}(h)(z)\right|^2 \left(\frac{1 - F(\mu)\left(\frac{z}{R\beta_t}\right)}{\left|\frac{z}{R\beta_t}\right|^\alpha} - 1\right) \\
=&\beta_t^{-d/q} N_{R\beta_t}^2(h) + \frac{R^d\beta_t^{d/p}}{(R\beta_t)^{2d}} \sum_{z\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} \left|F_{R\beta_t}(h)(z)\right|^2 \left(\frac{1 - F(\mu)\left(\frac{z}{R\beta_t}\right)}{\left|\frac{z}{R\beta_t}\right|^\alpha} - 1\right)
\end{aligned}
$$

Remember that $F(\mu)(u) \underset{u\to 0}{=} 1 - |u|^\alpha + o(|u|^\alpha)$. So, for $\epsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ such that for $|\frac{z}{R\beta_t}| < \delta$, we have $\left|\frac{1-F(\mu)(\frac{z}{R\beta_t})}{|\frac{z}{R\beta_t}|^\alpha} - 1\right| \leq \epsilon$. Then, using Parseval equality,

$$
\begin{aligned}
&\frac{R^d\beta_t^{d/p}}{(R\beta_t)^{2d}} \sum_{z\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} \left|F_{R\beta_t}(h)(z)\right|^2 \left(\frac{1 - F(\mu)\left(\frac{z}{R\beta_t}\right)}{\left|\frac{z}{R\beta_t}\right|^\alpha} - 1\right) \\
\leq& \frac{R^d\beta_t^{d/p}}{(R\beta_t)^{2d}} \left(\epsilon \sum_{z/\left|\frac{z}{R\beta_t}\right|<\delta} \left|F_{R\beta_t}(h)(z)\right|^2 + \delta^{-\alpha} \sum_{z/\left|\frac{z}{R\beta_t}\right|\geq\delta} \left|F_{R\beta_t}(h)(z)\right|^2 \left(1 - F(\mu)\left(\frac{z}{R\beta_t}\right)\right)\right) \\
\leq& \epsilon\beta_t^{-d/q} N_{2,R\beta_t}^2(h) + \delta^{-\alpha} R^d\beta_t^{d/p} \sum_{z\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} \left|F_{R\beta_t}(h)(z)\mathcal{F}_{R\beta_t}(\varphi)(z)\right|^2 \left|\frac{z}{R\beta_t}\right|^\alpha \\
=& \epsilon\beta_t^{-d/q} N_{2,R\beta_t}^2(h) + \delta^{-\alpha} R^d\beta_t^{-\alpha} \sum_{z\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} |\mathcal{F}_R(g_R)(z)|^2 \left|\frac{z}{R}\right|^\alpha.
\end{aligned}
$$

Moreover, by (91) and (90) it is easy to see that

$$
R^d \sum_{z\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} |\mathcal{F}_R(g_R)(z)|^2 \left|\frac{z}{R}\right|^\alpha \leq \beta_t^{\alpha-d/q}\rho(a,R,t). \tag{92}
$$

Then, since $\alpha > 0$, $\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ such that

$$
\begin{aligned}
\|g_R\|_{2,R}^2 &\leq (1+\epsilon)\beta_t^{-d/q} N_{2,R\beta_t}^2(h) + \delta^{-\alpha}\beta_t^{-d/q}\rho(a,R,t) \\
&\leq (1+\epsilon)\beta_t^{-d/q} N_{2,R\beta_t}^2(h) + \delta^{-\alpha}\beta_t^{-\alpha}\left(\beta_t^{\alpha-d/q}\rho(a,R,t)\right)
\end{aligned} \tag{93}
$$

3.4. $2p$-norm part. We work now on the most difficult part, that is the $2p$-norm. Using Fourier inversion formula,

$$\begin{aligned} g_R(x) &= \beta_t^{d/(2p)} \sum_{k\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} h(k)\varphi(\beta_t x - k) \\ &= \beta^{d/(2p)} \sum_{k\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} h(k) \sum_{n\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} \mathfrak{F}_{R\beta_t}(\varphi)(n) \exp\left(2i\pi \frac{(<\beta_t x - k, n>)}{R\beta_t}\right) \\ &= \beta_t^{d/(2p)} \sum_{n\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} F_{R\beta_t}(h)(n)\mathfrak{F}_{R\beta_t}(\varphi)(n) \exp\left(2i\pi \frac{<x,n>}{R}\right) \end{aligned}$$

First we cut the $2p$-norm of g_R in two parts, introducing $\frac{1}{(R\beta_t)^d}$.

$$\begin{aligned} &\|g_R\|_{2p,R} \\ \geq& \frac{\beta_t^{d/(2p)}}{(R\beta_t)^d} \left\| \sum_{n\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} F_{R\beta_t}(h)(n) \exp\left(2i\pi\frac{<\cdot,n>}{R}\right)\right\|_{2p,R} \\ &- \beta_t^{d/(2p)} \left\| \sum_{n\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} F_{R\beta_t}(h)(n) \left(\mathfrak{F}_{R\beta_t}(\varphi)(n) - \frac{1}{(R\beta_t)^d}\right) \exp\left(2i\pi\frac{<\cdot,n>}{R}\right)\right\|_{2p,R} \end{aligned} \tag{94}$$

We want to prove that the first term is close to the $2p$-norm of h, and that the second term is negligible. We first work on the second term in (94). Let $\delta_t \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ to be chosen later. We first use inversion formula of Proposition 1.3,Young inequality of Proposition 1.4 and we again cut the sum in two parts.

$$\begin{aligned} &\beta_t^{d/(2p)} \left\| \sum_{n\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} F_{R\beta_t}(h)(n) \left(\mathfrak{F}_{R\beta_t}(\varphi)(n) - \frac{1}{(R\beta_t)^d}\right) \exp\left(2i\pi\frac{<\cdot,n>}{R}\right)\right\|_{2p,R} \\ \leq& (R\beta_t)^{d/(2p)} N_{(2p)',R\beta_t}\left(F_{R\beta_t}(h)(\cdot)\left(\mathfrak{F}_{R\beta_t}(\varphi)(\cdot) - \frac{1}{(R\beta_t)^d}\right)\right) \\ \leq& (R\beta_t)^{d/(2p)} \left(\sum_{n/\left|\frac{n}{R\beta_t}\right|\leq\delta_t} \left|F_{R\beta_t}(h)(n)\left(\mathfrak{F}_{R\beta_t}(\varphi)(n) - \frac{1}{(R\beta_t)^d}\right)\right|^{(2p)'}\right)^{1/(2p)'} \\ &+ (R\beta_t)^{d/(2p)} \left(\sum_{n/\left|\frac{n}{R\beta_t}\right|>\delta_t} \left|F_{R\beta_t}(h)(n)\left(\mathfrak{F}_{R\beta_t}(\varphi)(n) - \frac{1}{(R\beta_t)^d}\right)\right|^{(2p)'}\right)^{1/(2p)'} \end{aligned} \tag{95}$$

Let us focus on the first term in (95). We have assumed that there exists a function $\epsilon(u) \underset{u\to0}{\to} 0$ such that $F(\mu)(u) \underset{u\to0}{=} 1 - |u|^\alpha + \epsilon(u)|u|^\alpha$. So for t sufficiently large, using Hölder inequality ($(2p)' < 2$) and Parseval equality,

$$
\begin{aligned}
&(R\beta_t)^{d/(2p)} \left(\sum_{n/\left|\frac{n}{R\beta_t}\right| \le \delta_t} \left| F_{R\beta_t}(h)(n) \left(\mathfrak{F}_{R\beta_t}(\varphi)(n) - \frac{1}{(R\beta_t)^d} \right) \right|^{(2p)'} \right)^{1/(2p)'} \\
=& \frac{(R\beta_t)^{d/(2p)}}{(R\beta_t)^d} \left(\sum_{n/\left|\frac{n}{R\beta_t}\right| \le \delta_t} \left| F_{R\beta_t}(h)(n) \left(\frac{\sqrt{1 - F(\mu)(\frac{n}{R\beta_t})}}{\left|\frac{n}{R\beta_t}\right|^{\alpha/2}} - 1 \right) \right|^{(2p)'} \right)^{1/(2p)'} \\
\le& \frac{(R\beta_t)^{d/(2p)}}{(R\beta_t)^d} N_{2,R\beta_t}(F_{R\beta_t}(h)) \left(\sum_{n/\left|\frac{n}{R\beta_t}\right| \le \delta_t} \left| \frac{\sqrt{1 - F(\mu)(\frac{n}{R\beta_t})}}{\left|\frac{n}{R\beta_t}\right|^{\alpha/2}} - 1 \right|^{2q} \right)^{1/(2q)} \\
=& \frac{(R\beta_t)^{d/(2p)}}{(R\beta_t)^{d/2}} N_{2,R\beta_t}(h) \left(\sum_{n/\left|\frac{n}{R\beta_t}\right| \le \delta_t} \left| \epsilon\left(\frac{n}{R\beta_t} \right) \right|^{2q} \right)^{1/(2q)} \\
\le& (R\beta_t)^{-d/(2q)} N_{2,R\beta_t}(h) (R\beta_t\delta_t)^{d/(2q)} \sup_{|u| \le \delta_t} \epsilon(u).
\end{aligned}
$$

To be negligible compared to $\beta_t^{-d/(2q)} N_{2,R\beta_t}(h)$, we have to choose δ_t such that

$$
(\beta_t\delta_t)^{d/(2q)} \sup_{|u| \le \delta_t} \epsilon(u) \underset{t \to +\infty}{\to} 0. \tag{96}
$$

Let us focus on the second term in (95). As the random walk is aperiodic, there exists $C > 0$ such that for $|x| \le 1$, $|x|^{\alpha/2} \le C\sqrt{1 - F(\mu)(x)}$. Then, using the fact that $\left|\frac{n}{R\beta_t}\right| \le 1$ and Hölder inequality,

$$
\begin{aligned}
&(R\beta_t)^{d/(2p)} \left(\sum_{n/\left|\frac{n}{R\beta_t}\right| > \delta_t} \left| F_{R\beta_t}(h)(n) \left(\mathfrak{F}_{R\beta_t}(\varphi)(n) - \frac{1}{(R\beta_t)^d} \right) \right|^{(2p)'} \right)^{1/(2p)'} \\
\le& C \frac{(R\beta_t)^{d/(2p)}}{(R\beta_t)^d} \left(\sum_{n/\left|\frac{n}{R\beta_t}\right| > \delta_t} \left| F_{R\beta_t}(h)(n) \frac{\sqrt{1 - F(\mu)(\frac{n}{R\beta_t})}}{|\frac{n}{R\beta_t}|^{\alpha/2}} \right|^{(2p)'} \right)^{1/(2p)'} \\
\le& C \frac{(R\beta_t)^{d/(2p)}}{(R\beta_t)^d} N_{2,R\beta_t} \left(F_{R\beta_t}(h)(\cdot) \sqrt{1 - F(\mu)\left(\frac{\cdot}{R\beta_t} \right)} \right) (R\beta_t)^{\alpha/2} \left(\sum_{n/|n| > R\beta_t\delta_t} |n|^{-\alpha q} \right)^{1/(2q)} \\
\le& C (R\beta_t)^{\alpha/2 - d/(2q) - d/2} N_{2,R\beta_t} \left(F_{R\beta_t}(h)(\cdot) \sqrt{1 - F(\mu)\left(\frac{\cdot}{R\beta_t} \right)} \right) \left((R\beta_t\delta_t)^{d - \alpha q} \right)^{1/(2q)}.
\end{aligned}
$$

Using (90), we have

$$
\begin{aligned}
&(R\beta_t)^{d/(2p)} \left(\sum_{n/\left|\frac{n}{R\beta_t}\right|>\delta_t} \left| F_{R\beta_t}(h)(n) \left(\mathfrak{F}_{R\beta_t}(\varphi)(n) - \frac{1}{(R\beta_t)^d} \right) \right|^{(2p)'} \right)^{1/(2p)'} \\
\leq & C(\beta_t\delta_t)^{\frac{d-\alpha q}{2q}} \sqrt{\beta_t^{\alpha-d/q}\rho(a,R,t)}.
\end{aligned}
$$

To be negligible compared to $\sqrt{\beta_t^{\alpha-d/q}\rho(a,R,t)}$, since $d-\alpha q<0$, it is enough to choose δ_t such that

$$\beta_t\delta_t \to +\infty. \tag{97}$$

We want now to prove that conditions (96) and (97) are compatible. Condition (97) is equivalent to $\beta_t \gg \delta_t^{-1}$ and condition (97) is equivalent to $\beta_t \ll \delta_t^{-1} \sup_{|u|\leq\delta_t} |\epsilon(u)|^{-2q/d}$. Then conditions (96) and (97) are compatible if $\sup_{|u|\leq\delta_t} |\epsilon(u)| \ll 1$ which is equivalent to $\delta_t \to 0$. We have now succeeded to control the second term in (94) by proving that :

$$
\begin{aligned}
&\beta_t^{d/(2p)} \left\| \sum_{n\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} F_{R\beta_t}(h)(n) \left(\mathfrak{F}_{R\beta_t}(\varphi)(n) - \frac{1}{(R\beta_t)^d} \right) \exp\left(2i\pi \frac{<\cdot,n>}{R}\right) \right\|_{2p,R} \\
=& o\left((R\beta_t)^{-d/(2q)} N_{2,R\beta_t}(h)\right) + o\left(\sqrt{\beta_t^{\alpha-d/q}\rho(a,R,t)}\right) \\
=& o\left(\sqrt{\beta_t^{\alpha-d/q}\rho(a,R,t)}\right)
\end{aligned} \tag{98}
$$

It remains to control the first term of the sum in (94). Performing the change of variable $x \to x\beta_t$,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\beta_t^{d/(2p)}}{(R\beta_t)^d} \left\| \sum_{n\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} F_{R\beta_t}(h)(n) \exp\left(2i\pi\frac{<\cdot,n>}{R}\right) \right\|_{2p,R} \\
=& \left\| \frac{1}{(R\beta_t)^d} \sum_{n\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} F_{R\beta_t}(h)(n) \exp\left(2i\pi\frac{<\cdot,n>}{R\beta_t}\right) \right\|_{2p,R\beta_t}.
\end{aligned}
$$

For $x\in\mathbb{R}^d$, let

$$f(x) := \frac{1}{(R\beta_t)^d} \sum_{n\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} F_{R\beta_t}(h)(n) \exp\left(2i\pi\frac{<x,n>}{R\beta_t}\right).$$

Note that f is $R\beta_t$-periodic and that $f(x) = h(x)$, $\forall x \in \mathbb{T}_{R\beta_t}$. We define an approximation of f by :

$$\forall x \in \left[-\frac{R\beta_t}{2}, \frac{R\beta_t}{2}\right]^d, \bar{f}(x) = \sum_{k \in \mathbb{T}_{R\beta_t}} \bar{f}_k \ \mathbb{1}_{Q_k}(x)$$

where Q_k is the unit cube based on k : $[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}]^d$. And $\bar{f}_k = \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} f(x)dx$ the mean of f on each unit cube Q_k. Let us define the integer part as following : $\forall x \in Q_k, \lfloor x \rfloor = k$. Then, $\forall x \in Q_k, f(\lfloor x \rfloor) = h(k)$. Introducing $f(\lfloor \cdot \rfloor)$ and $\bar{f}(\cdot)$, we have that :

$$\|f\|_{2p,R\beta_t} \geq \|f(\lfloor \cdot \rfloor)\|_{2p,R\beta_t} - \left\|\bar{f} - f(\lfloor \cdot \rfloor)\right\|_{2p,R\beta_t} - \left\|f - \bar{f}\right\|_{2p,R\beta_t}. \tag{99}$$

The first term is exactly the $2p$-norm of h. Let us examine the second term. For $x \in [0, R\beta_t]^d$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k \in \mathbb{T}_{R\beta_t}} \bar{f}(k) \ \mathbb{1}_{Q_k}(x) - f(\lfloor x \rfloor) \\
=&\frac{1}{(R\beta_t)^d} \sum_{k \in \mathbb{T}_{R\beta_t}} \int_{Q_k} \sum_{n \in \mathbb{T}_{R\beta_t}} F_{R\beta_t}(h)(n) \exp\left(2i\pi \frac{< n, y >}{R\beta_t}\right) dy \ \mathbb{1}_{Q_k}(x) \\
&- \frac{1}{(R\beta_t)^d} \sum_{n \in \mathbb{T}_{R\beta_t}} F_{R\beta_t}(h)(n) \exp\left(2i\pi \frac{< n, \lfloor x \rfloor >}{R\beta_t}\right) \\
=&\frac{1}{(R\beta_t)^d} \sum_{n \in \mathbb{T}_{R\beta_t}} F_{R\beta_t}(h)(n) \underbrace{\int_{Q_0} \exp\left(2i\pi \frac{< n, y >}{R\beta_t}\right) dy}_{C\left(\frac{n}{R\beta_t}\right)} \sum_{k \in \mathbb{T}_{R\beta_t}} \exp\left(2i\pi \frac{< n, k >}{R\beta_t}\right) \ \mathbb{1}_{Q_k}(x) \\
&- \frac{1}{(R\beta_t)^d} \sum_{n \in \mathbb{T}_{R\beta_t}} F_{R\beta_t}(h)(n) \exp\left(2i\pi \frac{< n, \lfloor x \rfloor >}{R\beta_t}\right) \\
=&\frac{1}{(R\beta_t)^d} \sum_{n \in \mathbb{T}_{R\beta_t}} F_{R\beta_t}(h)(n) \left(C\left(\frac{n}{R\beta_t}\right) - 1\right) \exp\left(2i\pi \frac{< n, \lfloor x \rfloor >}{R\beta_t}\right)
\end{aligned}$$

Therefore, using inversion formula of Proposition 1.1, Young inequality of Proposition 1.4 and Hölder inequality :

$$\begin{aligned}
&\left\|\bar{f} - f(\lfloor\cdot\rfloor)\right\|_{2p,R\beta_t} \\
=&\frac{1}{(R\beta_t)^d} N_{2p,R\beta_t}\left(\sum_{n\in\mathbb{T}_{R\beta_t}} F_{R\beta_t}(h)(n)\left(C\left(\frac{n}{R\beta_t}\right)-1\right)\exp\left(2i\pi\frac{<n,\cdot>}{R\beta_t}\right)\right) \\
\leq&\frac{(R\beta_t)^{d/(2p)}}{(R\beta_t)^d} N_{(2p)',R\beta_t}\left(F_{R\beta_t}(h)(\cdot)\left(C\left(\frac{\cdot}{R\beta_t}\right)-1\right)\right) \\
\leq&\frac{(R\beta_t)^{d/(2p)}}{(R\beta_t)^d} N_{2,R\beta_t}\left(F_{R\beta_t}(h)(\cdot)\sqrt{1-F(\mu)\left(\frac{\cdot}{R\beta_t}\right)}\right) N_{2q,R\beta_t}\left(\frac{C\left(\frac{\cdot}{R\beta_t}\right)-1}{\sqrt{1-F(\mu)\left(\frac{\cdot}{R\beta_t}\right)}}\right).
\end{aligned}$$

Let us examine $N_{2q,R\beta_t}\left(\frac{C\left(\frac{\cdot}{R\beta_t}\right)-1}{\sqrt{1-F(\mu)\left(\frac{\cdot}{R\beta_t}\right)}}\right)$. A simple computation shows that

$$C(x) = \prod_{j=1}^{d}\frac{\sin(\pi x_j)}{\pi x_j}.$$

Then, for x close to 0,

$$C(x) \underset{0}{\sim} \prod_{j=1}^{d}\frac{\pi x_j - \frac{1}{6}(\pi x_j)^3}{\pi x_j} \underset{0}{\sim} \prod_{j=1}^{d}\left(1-\frac{(\pi x_j)^2}{6}\right) \underset{0}{\sim} 1 + O(|x|^2).$$

Combining this with the fact that $1 - F(\mu)(x) \underset{0}{\sim} |x|^{\alpha}$, we have that

$$\frac{C(x)-1}{\sqrt{1-F(\mu)(x)}} = O(|x|^{2-\alpha/2}).$$

Moreover, as the random walk is aperiodic, we know that $F(\mu)(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Then the function $x \to \frac{C(x)-1}{\sqrt{1-F(\mu)(x)}}$ is uniformly bounded for $|x| \leq 1$ and

$$N_{2q,R\beta_t}\left(\frac{C\left(\frac{\cdot}{R\beta_t}\right)-1}{\sqrt{1-F(\mu)\left(\frac{\cdot}{R\beta_t}\right)}}\right) = O((R\beta_t)^{d/(2q)}).$$

Therefore, using (90)

$$\begin{aligned}
\left\|\bar{f} - f(\lfloor\cdot\rfloor)\right\|_{2p,R\beta_t} &= O\left((R\beta_t)^{-d/2}\right) N_{2,R\beta_t}\left(F_{R\beta_t}(h)(\cdot)\sqrt{1-F(\mu)\left(\frac{\cdot}{R\beta_t}\right)}\right) \\
&= O\left(\sqrt{\rho(a,R,t)}\right). \qquad (100)
\end{aligned}$$

We turn now to the third term of (99).

$$\left\|f-\bar{f}\right\|_{2p,R\beta_t}^{2p}=\sum_{k\in\mathbb{T}_{R\beta_t}}\int_{Q_k}\left|f(x)-\bar{f}_k\right|^{2p}dx$$

By Poincaré's inequality, as the unit cube is a Lypschitz's domain,

$$\left\|f-\bar{f}_k\right\|_{2p,Q_k}\leq C\left\|\nabla f\right\|_{2p,Q_k}$$

where C depends only in d, p and $|Q_k|$. Hence,

$$\begin{aligned}\left\|f-\bar{f}\right\|_{2p,R\beta_t}\leq&C\sum_{k\in\mathbb{T}_{R\beta_t}}\left\|\nabla f\right\|_{2p,Q_k}\\=&C\left\|\nabla f\right\|_{2p,R\beta_t}.\end{aligned}$$

Moreover, denoting by ψ_j the j-th coordinate function $\psi_j(n)=n_j$, we use inversion formula in Proposition 1.3, Young inequality in Proposition 1.4 and Hölder's inequality :

$$\begin{aligned}&\left\|f-\bar{f}\right\|_{2p,R\beta_t}\\\leq&\frac{C}{(R\beta_t)^d}\sum_{j=1}^{d}\left\|\sum_{n\in\mathbb{T}_{R\beta_t}}F_{R\beta_t}(h)(n)\frac{2i\pi\psi_j(n)}{R\beta_t}\exp\left(2i\pi\frac{<n,\cdot>}{R\beta_t}\right)\right\|_{2p,R\beta_t}\\\leq&C\frac{(R\beta_t)^{d/(2p)}}{(R\beta_t)^d}\sum_{j=1}^{d}N_{(2p)',R\beta_t}\left(F_{R\beta_t}(h)(\cdot)\frac{2i\psi_j(\cdot)}{R\beta_t}\right)\\\leq&C\frac{(R\beta_t)^{d/(2p)}}{(R\beta_t)^d}N_{(2p)',R\beta_t}\left(F_{R\beta_t}(h)(\cdot)\frac{|\cdot|}{R\beta_t}\right)\\\leq&C\frac{(R\beta_t)^{d/(2p)}}{(R\beta_t)^d}N_{2,R\beta_t}\left(F_{R\beta_t}(h)(\cdot)\sqrt{1-F(\mu)\left(\frac{\cdot}{R\beta_t}\right)}\right)\\&\qquad N_{2q,R\beta_t}\left(\frac{|\cdot|}{R\beta_t}\left(1-F(\mu)\left(\frac{|\cdot|}{R\beta_t}\right)\right)^{-1/2}\right)\end{aligned}$$

As previously, $1-F(\mu)(x)\underset{0}{=}|x|^{\alpha}$ implies that $\frac{|x|}{\sqrt{1-F(\mu)(x)}}\underset{0}{=}|x|^{1-\alpha/2}$ which is bounded around 0 since $\alpha\in]0,2]$. Moreover, since the random walk was assumed aperiodic, $F(\mu)(x)=1\Leftrightarrow x=0$. Then, the function $x\to\frac{|x|}{\sqrt{1-F(\mu)(x)}}$ is uniformly bounded for $|x|\leq 1$. Therefore,

$$N_{2q,R\beta_t}\left(\frac{|\cdot|}{R\beta_t}\left(1-F(\mu)\left(\frac{\cdot}{R\beta_t}\right)\right)^{-1/2}\right)=O((R\beta_t)^{d/(2q)})$$

and using (90)

$$\begin{aligned}\left\|f-\bar{f}\right\|_{2p,R\beta_t} &= O\left((R\beta_t)^{-d/2}N_{2,R\beta_t}\left(F_{R\beta_t}(h)(\cdot)\sqrt{1-F(\mu)\left(\frac{\cdot}{R\beta_t}\right)}\right)\right)\\ &= O\left(\sqrt{\rho(a,R,t)}\right)\end{aligned} \tag{101}$$

Combining (99), (100), (101) and the fact that $N_{2p,R\beta_t}(h)=1$, we have shown that

$$\|f\|_{2p,R\beta_t} \geq 1-O\left(\sqrt{\rho(a,R,t)}\right) \tag{102}$$

Finally, putting together (94), (98), (102), as $\alpha-d/q>0$, we have controlled the $2p$-norm of g_R by :

$$\begin{aligned}\|g_R\|_{2p,R} \geq& 1-o\left(\sqrt{\beta_t^{\alpha-d/q}\rho(a,R,t)}\right)-O\left(\sqrt{\rho(a,R,t)}\right)\\ =&1-o\left(\sqrt{\beta_t^{\alpha-d/q}\rho(a,R,t)}\right)\end{aligned} \tag{103}$$

Finally, $\forall R>0$, $\forall\epsilon>0, \exists\delta>0$ such that

$$\begin{aligned}&\beta_t^{\alpha-d/q}\rho(a,R,t)\\ =&a\beta_t^{-\frac{d}{q}}N^2_{2,R\beta_t}(h)-\beta_t^{\alpha-\frac{d}{q}}<h,A_{R\beta_t}h>_{R\beta_t}\\ \geq&\frac{a}{1+\epsilon}\left(\|g_R\|^2_{2,R}+\delta^{-\alpha}o\left(\beta_t^{\alpha-d/q}\rho(a,R,t)\right)\right)+R^d\sum_{z\in\mathbb{T}_{R\beta_t}}|\mathcal{F}_R(g_R)(z)|^2\left|\frac{z}{R}\right|^\alpha\\ =&\frac{a}{1+\epsilon}\|g_R\|^2_{2p,R}\|g\|^2_2+\frac{a\delta^{-\alpha}}{1+\epsilon}o\left(\beta_t^{\alpha-d/q}\rho(a,R,t)\right)+\|g_R\|^2_{2p,R}R^d\sum_{z\in\mathbb{T}_{R\beta_t}}|\mathcal{F}_R(g)(z)|^2\left|\frac{z}{R}\right|^\alpha\\ \geq&\frac{\|g_R\|^2_{2p,R}}{1+\epsilon}\left(a\|g\|^2_{2,R}+R^d\sum_{z\in\mathbb{Z}^d}|\mathcal{F}_R(g)(z)|^2\left|\frac{z}{R}\right|^\alpha\right)+\frac{a\delta^{-\alpha}}{1+\epsilon}o\left(\beta_t^{\alpha-d/q}\rho(a,R,t)\right)\end{aligned}$$

Then we obtain that $\forall R,\epsilon>0, \exists\delta>0$ such that :

$$\beta_t^{\alpha-d/q}\rho(a,R,t)\geq\frac{\|g_R\|^2_{2p,R}}{1+\epsilon}\rho(a,R)+\frac{a\delta^{-\alpha}}{1+\epsilon}o\left(\beta_t^{\alpha-d/q}\rho(a,R,t)\right).$$

Using (103),

$$\beta_t^{\alpha-d/q}\rho(a,R,t)\geq\frac{1-o\left(\beta_t^{\alpha-d/q}\rho(a,R,t)\right)}{1+\epsilon}\rho(a,R)+\frac{a\delta^{-\alpha}}{1+\epsilon}o\left(\beta_t^{\alpha-d/q}\rho(a,R,t)\right),$$

then we let $t\to+\infty$ then we let $\epsilon\to 0$ and we have that $\forall R>0$

$$\liminf_{t\to+\infty}\beta_t^{\alpha-d/q}\rho(a,R,t)\geq\rho(a,R).$$

Note that the previous inequality is always true even if $\liminf_{t\to+\infty}\beta_t^{\alpha-d/q}\rho(a,R,t)$ is infinite.

4. Proof of Lemma 1.8

Let p_s and $p_s^{R\beta_t}$ the transition probability of X_s and $X_s^{R\beta_t}$.

$$\begin{aligned} G_{R\beta_t,\lambda_t}(0,0) &= \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda_t s) p_s^{R\beta_t}(0,0) ds \\ &\leq 1 + \int_1^{+\infty} \exp(-\lambda_t s) \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} p_s(0, zR\beta_t) ds. \end{aligned}$$

By Theorem 1.1 in [**BL02**], there exists C such that

$$\forall s \geq 0, \forall z \in \mathbb{Z}^d, p_s(0, zR\beta_t) \leq C\left(s^{-d/\alpha} \wedge \frac{s}{|zR\beta_t|^{d+\alpha}}\right).$$

Then,

$$\begin{aligned} G_{R\beta_t,\lambda_t}(0,0) &\leq 1 + C\int_1^{+\infty} \exp(-\lambda_t s) \left(s^{-d/\alpha} + \sum_{0<|z|\leq \frac{s^{1/\alpha}}{R\beta_t}} s^{-d/\alpha} + \sum_{|z|>\frac{s^{1/\alpha}}{R\beta_t}} \frac{s}{|zR\beta_t|^{d+\alpha}}\right) ds \\ &\leq 1 + C\left(\int_1^{\beta_t^\alpha} s^{-d/\alpha} ds + \int_{\beta_t^\alpha}^{+\infty} \frac{\exp(-\lambda_t s)}{\beta_t^d} ds\right) + C\int_1^{+\infty} \frac{\exp(-\lambda_t s)}{(R\beta_t)^d} ds \\ &\leq 1 + C\int_1^{\beta_t^\alpha} s^{-d/\alpha} ds + C\frac{\exp(-\lambda_t \beta_t^\alpha)}{\lambda_t \beta_t^d} + C\frac{\exp(-\lambda_t)}{\lambda_t (R\beta_t)^d}. \end{aligned}$$

Remember that $\lambda_t = a\beta_t^{-\alpha}$. Then we have,

$$G_{R\beta_t,\lambda_t}(0,0) \leq 1 + C\int_1^{\beta_t^\alpha} s^{-d/\alpha} ds + O\left(\beta_t^{\alpha-d}\right).$$

Now, if we distinguish the three cases $\alpha < d, \alpha = d$ and $\alpha > d$ we have the result.

PROPOSITION 4.1.

$$\inf\{a - \rho(a), a > 0\} = -\chi_{d,p}$$

DÉMONSTRATION. We recall that $\rho(a) = \inf\left\{a\|g\|_2^2 + \int_{\mathbb{R}^d} |\omega|^\alpha |\mathcal{F}(g)(\omega)|^2 d\omega, \|g\|_{2p} = 1\right\}$. Set $g_\beta(\cdot) = \beta^{d/2p} g(\beta\cdot)$. We remark that $\|g_\beta\|_{2p} = 1$, $\|g_\beta\|_2 = \beta^{-d/2q}\|g\|_2$ and $\int_{\mathbb{R}^d} |\omega|^\alpha |\mathcal{F}(g_\beta)(\omega)|^2 d\omega = \beta^{\alpha-d/q}\int_{\mathbb{R}^d} |\omega|^\alpha |\mathcal{F}(g)(\omega)|^2 d\omega$.

Then we minimize over β the function :

$$\Phi_g(\beta) = a\beta^{-d/q}\|g\|_2^2 + \beta^{\alpha-d/q}\int_{\mathbb{R}^d} |\omega|^\alpha |\mathcal{F}(g)(\omega)|^2 d\omega.$$

Picking the optimal value $\beta^* = \left(\frac{ad}{\alpha q - d}\frac{\|g\|_2^2}{\int_{\mathbb{R}^d}|\omega|^\alpha|\mathcal{F}(g)(\omega)|^2 d\omega}\right)^{1/\alpha}$ we have that

$$\rho(a) = a^{1-d/\alpha q}\left(\frac{\alpha q}{\alpha q - d}\right)\left(\frac{\alpha q - d}{d}\right)^{d/\alpha q} \inf\left\{\|g\|_2^{2(1-d/\alpha q)}\left(\int_{\mathbb{R}^d} |\omega|^\alpha |\mathcal{F}(g)(\omega)|^2 d\omega\right)^{d/\alpha q}, \|g\|_{2p} = 1\right\}.$$

Then optimizing over $a > 0$ the expression $\inf\{a - \rho(a), a > 0\}$ with the optimal value

$$a^* = \frac{\alpha q - d}{d} \inf \left\{ \|g\|_2^{2(\alpha q/d-1)} \int_{\mathbb{R}^d} |\omega|^\alpha |\mathcal{F}(g)(\omega)|^2 d\omega, \|g\|_{2p} = 1 \right\}$$

we have that

$$\inf\{a - \rho(a), a > 0\} = -\inf \left\{ \|g\|_2^{2(\alpha q/d-1)} \int_{\mathbb{R}^d} |\omega|^\alpha |\mathcal{F}(g)(\omega)|^2 d\omega, \|g\|_{2p} = 1 \right\}.$$

Note that the expression is invariant by the transformation $g_\beta(\cdot) = \beta^{d/2p} g(\beta \cdot)$. Therefore we can freely add the condition $\|g\|_2 = 1$. Then

$$\inf\{a - \rho(a), a > 0\} = -\inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |\omega|^\alpha |\mathcal{F}(g)(\omega)|^2 d\omega, \|g\|_{2p} = \|g\|_2 = 1 \right\} := -\chi_{d,p}.$$

$\square$

CHAPITRE 7

Bilan et perspectives

Dans cette thèse nous nous sommes intéressés aux grandes déviations du temps local d'auto-intersections de marches aléatoires. On a vu que cette question était liée à des modèles physiques tels que des modèles de polymères ou des problèmes d'écoulements en milieux stratifiés. Les intersections de marches aléatoires intéressent les mathématiciens depuis les années cinquante, et les grandes déviations d'intersections de marches aléatoires ont été abondemment étudié au cours des années deux mille.

Avec cette thèse, nous améliorons les connaissances sur les grandes déviations des temps locaux d'auto-intersections de marches aléatoires dans deux principales directions. D'une part nous avons unifié les méthodes de preuves au travers du théorème d'isomorphisme de Dynkin-Eisenbaum, et d'autre part nous avons prouvé de nouveaux résultats.

En effet, nous avons vu que les méthodes utilisées par les auteurs pour prouver les principes de grandes déviations étaient nombreuses et variées. Dans cette thèse nous avons montré que la méthode basée sur le théorème d'isomorphisme de Dynkin-Eisenbaum, d'abord introduite par Castell [**Cas10**] dans le cas critique, fonctionnait aussi dans le cas sur-critique [**Lau10b**] et sous-critique [**Lau10a**].

En ce qui concerne les nouveaux résultats, nous avons d'abord prouvé un principe de grandes déviations dans le cas critique et sur-critque des marches α-stables (Chapitre 4). Puis, nous avons montré un principe de grandes déviations dans le cas sous-critique de la marche simple (Chapitre 5). Ce résultat est une extension d'un résultat de Becker et König [**BK11**] puisque les auteurs n'obtenaient pas ce principe pour le cas sous-critique en entier, et ils avaient de surcroît une restriction au niveau des échelles de déviations. Enfin, nous cherchons à étendre ce dernier résultat aux marches α-stables où nous avons pour l'instant un résultat de grandes déviations partiel (Chapitre 6).

Il reste cependant beaucoup de travail à faire sur la question. Dans un premier temps, il nous apparaît naturel et envisageable d'améliorer nos propres résultats. Tout d'abord il reste à terminer la démonstration du cas sous-critique α-stable, ce à quoi nous travaillons.

Ensuite, lorsque nous travaillons sur les marches α-stables, nous considérons les marches aléatoires vérifiant l'hypothèse 2.16 (Chapitre 2), ce qui restreint nos résultats. Or cette hypothèse ne sert qu'à obtenir des estimées de la fonction de Green des marches considérées, nous pensons donc qu'elle n'est pas nécessaire à l'obtention du principe de grandes déviations. Nous pourrions donc travailler à l'obtention d'estimées de la fonction de Green des marches α-stables en se passant de l'hypothèse 2.16.

Dans un deuxième temps, un certain nombres de questions liées aux intersections de marches aléatoires sont ouvertes et intéressantes. D'abord, la question des déviations modérées est ouverte à l'exception de la double intersection dans le cas sous-critique. Avec le théorème d'isomorphisme de Dynkin-Eisenbaum, le temps local d'auto-intersections est plus ou moins remplacé par la norme d'un processus Gaussien. C'est le contrôle de cette dernière qui limite nos résultats aux très grandes déviations. Ainsi, si nous comprenons très bien le comportement de la norme de ce processus gaussien (essentiellement donnée par la fonction de Green de la marche considérée), nous avons peut-être une chance de descendre à l'échelle des grandes déviations, voire des déviations modérées.

Il paraît aussi intéressant de voir si le théorème d'isomorphisme de Dynkin-Eisenbaum peut s'appliquer à la question du nombre de points visités par une marche aléatoire, d'abord sur des résultats connus, puis si la technique est concluante, d'essayer de l'appliquer à des questions ouvertes.

Une autre question très intéressante est celle des minimiseurs des formules variationelles rencontrées. On a vu que celles-ci pouvaient parfois s'exprimer comme les meilleures constantes dans une inégalité de type Gagliardo-Nirenberg. Dans les cas où ces minimiseurs sont connus, une question est de savoir si une meilleure compréhension de ces minimiseurs peut nous apporter des informations sur les stratégies adoptées par les marches aléatoires pour réaliser leurs grandes déviations.

Bibliographie

[AC07a] Amine Asselah and Fabienne Castell. A note on random walk in random scenery. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 43(2) :163–173, 2007.

[AC07b] Amine Asselah and Fabienne Castell. Random walk in random scenery and self-intersection local times in dimensions $d \geq 5$. *Probab. Theory Related Fields*, 138(1-2) :1–32, 2007.

[Ass08] Amine Asselah. Large deviations estimates for self-intersection local times for simple random walk in $\mathbb{Z}^3$. *Probab. Theory Related Fields*, 141(1-2) :19–45, 2008.

[Ass09] Amine Asselah. Large deviation principle for self-intersection local times for random walk in $\mathbb{Z}^d$ with $d \geq 5$. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 6 :281–322, 2009.

[Ass10] Amine Asselah. Shape transition under excess self-intersections for transient random walk. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 46(1) :250–278, 2010.

[Bar90] A. J. Barrett. On the Domb-Joyce model for self-avoiding walks in the continuum. *J. Statist. Phys.*, 58(3-4) :617–626, 1990.

[BCR05] Richard Bass, Xia Chen, and Jay Rosen. Large deviations for renormalized self-intersection local times of stable processes. *Ann. Probab.*, 33(3) :984–1013, 2005.

[BCR06] Richard F. Bass, Xia Chen, and Jay Rosen. Moderate deviations and laws of the iterated logarithm for the renormalized self-intersection local times of planar random walks. *Electron. J. Probab.*, 11 :no. 37, 993–1030 (electronic), 2006.

[BK09] Mathias Becker and Wolfgang König. Moments and distribution of the local times of a transient random walk on $\mathbb{Z}^d$. *J. Theoret. Probab.*, 22(2) :365–374, 2009.

[BK11] Mathias Becker and Wolfgang König. Self-intersection local times of random walks : exponential moments in subcritical dimensions. *Probability Theory and Related Fields*, pages 1–21, 2011. 10.1007/s00440-011-0377-0.

[BL02] Richard F. Bass and David A. Levin. Transition probabilities for symmetric jump processes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 354(7) :2933–2953 (electronic), 2002.

[Bol89] Erwin Bolthausen. A central limit theorem for two-dimensional random walks in random sceneries. *Ann. Probab.*, 17(1) :108–115, 1989.

[Bol02] Erwin Bolthausen. Large deviations and interacting random walks. In *Lectures on probability theory and statistics (Saint-Flour, 1999)*, volume 1781 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–124. Springer, Berlin, 2002.

[Bor79a] A. N. Borodin. A limit theorem for sums of independent random variables defined on a recurrent random walk. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 246(4) :786–787, 1979.

[Bor79b] A. N. Borodin. Limit theorems for sums of independent random variables defined on a transient random walk. *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, 85 :17–29, 237, 244, 1979. Investigations in the theory of probability distributions, IV.

[Bor81] A. N. Borodin. The asymptotic behavior of local times of recurrent random walks with finite variance. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 26(4) :769–783, 1981.

[BS95] D. C. Brydges and G. Slade. The diffusive phase of a model of self-interacting walks. *Probab. Theory Related Fields*, 103(3) :285–315, 1995.

[BS10] D. Brydges and G. Slade. Renormalisation group analysis of weakly self-avoiding walk in dimensions four and higher. *ArXiv e-prints*, March 2010.

[BvdHK07] David Brydges, Remco van der Hofstad, and Wolfgang König. Joint density for the local times of continuous-time Markov chains. *Ann. Probab.*, 35(4) :1307–1332, 2007.

[Cas10] Fabienne Castell. Large deviations for intersection local times in critical dimension. *Ann. Probab.*, 38(2) :927–953, 2010.

[Čer07] Jiří Černý. Moments and distribution of the local time of a two-dimensional random walk. *Stochastic Process. Appl.*, 117(2) :262–270, 2007.

[CGP11] F. Castell, N. Guillotin–Plantard, and F. Pène. Limit theorems for one and two-dimensional random walks in random scenery. *ArXiv e-prints*, March 2011.

[CGPS10] F. Castell, N. Guillotin-Plantard, F. Pène, and B. Schapira. A local limit theorem for random walks in random scenery and on randomly oriented lattices. *ArXiv e-prints*, February 2010.

[Che04] Xia Chen. Exponential asymptotics and law of the iterated logarithm for intersection local times of random walks. *Ann. Probab.*, 32(4) :3248–3300, 2004.

[Che08] Xia Chen. Limit laws for the energy of a charged polymer. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 44(4) :638–672, 2008.

[Che10] Xia Chen. *Random walk intersections*, volume 157 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. Large deviations and related topics.

[CL04] Xia Chen and Wenbo V. Li. Large and moderate deviations for intersection local times. *Probab. Theory Related Fields*, 128(2) :213–254, 2004.

[CLR05] Xia Chen, Wenbo V. Li, and Jay Rosen. Large deviations for local times of stable processes and stable random walks in 1 dimension. *Electron. J. Probab.*, 10 :no. 16, 577–608 (electronic), 2005.

[CM09] Xia Chen and Peter Mörters. Upper tails for intersection local times of random walks in supercritical dimensions. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 79(1) :186–210, 2009.

[CR05] Xia Chen and Jay Rosen. Exponential asymptotics for intersection local times of stable processes and random walks. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 41(5) :901–928, 2005.

[dA85] A. de Acosta. Upper bounds for large deviations of dependent random vectors. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 69(4) :551–565, 1985.

[dC72] J des Cloiseaux. Lagrangian theory for a self-avoiding random chain. *Phy. Rev.*, 10(5) :1665–1669, 1972.

[DE51] A. Dvoretzky and P. Erdös. Some problems on random walk in space. In *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1950*, pages 353–367, Berkeley and Los Angeles, 1951. University of California Press.

[DEK50] A. Dvoretzky, P. Erdös, and S. Kakutani. Double points of paths of Brownian motion in n-space. *Acta Sci. Math. Szeged*, 12(Leopoldo Fejer et Frederico Riesz LXX annos natis dedicatus, Pars B) :75–81, 1950.

[DEK54] A. Dvoretzky, P. Erdös, and S. Kakutani. Multiple points of paths of Brownian motion in the plane. *Bull. Res. Council Israel*, 3 :364–371, 1954.

[DEK58] A. Dvoretzky, P. Erdős, and S. Kakutani. Points of multiplicity *germc* of plane Brownian paths. *Bull. Res. Council Israel Sect. F*, 7F :175–180 (1958), 1958.

[DEKT57] A. Dvoretzky, P. Erdős, S. Kakutani, and S. J. Taylor. Triple points of Brownian paths in 3-space. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 53 :856–862, 1957.

[dG72] Pierre-Gilles de Gennes. Exponents for the excluded volume problems as derived by the wilson method. *Phys. Lett.*, 38A(1) :339–340, 1972.

[DGH92] B. Derrida, R. B. Griffiths, and P. G. Higgs. A model of directed walks with random self-interactions. *EPL (Europhysics Letters)*, 18(4) :361, 1992.

[DH94] B Derrida and P G Higgs. Low-temperature properties of directed walks with random self interactions. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 27(16) :5485, 1994.

[DJ72] C. Domb and G.S. Joyce. Cluster expansion for a polymer chain. *J. Phys*, 5 :956–976, 1972.

[Dom60] C. Domb. Self-avoiding walks on lattices. *Adv. Chem. Phys.*, 15 :229–259, 1960.

[DU10] G. Deligiannidis and S. Utev. An asymptotic variance of the self-intersections of random walks. *ArXiv e-prints*, April 2010.

[DV75a] M. D. Donsker and S. R. S. Varadhan. Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time. I. II. *Comm. Pure Appl. Math.*, 28 :1–47 ; ibid. 28 (1975), 279–301, 1975.

[DV75b] M. D. Donsker and S. R. S. Varadhan. Asymptotic evaluation of certain Wiener integrals for large time. In *Functional integration and its applications (Proc. Internat. Conf., London, 1974)*, pages 15–33. Clarendon Press, Oxford, 1975.

[DV75c] M. D. Donsker and S. R. S. Varadhan. Asymptotics for the Wiener sausage. *Comm. Pure Appl. Math.*, 28(4) :525–565, 1975.

[DV76] M. D. Donsker and S. R. S. Varadhan. Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time. III. *Comm. Pure Appl. Math.*, 29(4) :389–461, 1976.

[DV79] M. D. Donsker and S. R. S. Varadhan. On the number of distinct sites visited by a random walk. *Comm. Pure Appl. Math.*, 32(6) :721–747, 1979.

[Dyn84] E. B. Dynkin. Polynomials of the occupation field and related random fields. *J. Funct. Anal.*, 58(1) :20–52, 1984.

[Dyn86] E. B. Dynkin. Functionals associated with self-intersections of the planar Brownian motion. In *Séminaire de Probabilités, XX, 1984/85*, volume 1204 of *Lecture Notes in Math.*, pages 553–571. Springer, Berlin, 1986.

[Dyn88a] E. B. Dynkin. Regularized self-intersection local times of planar Brownian motion. *Ann. Probab.*, 16(1) :58–74, 1988.

[Dyn88b] E. B. Dynkin. Self-intersection gauge for random walks and for Brownian motion. *Ann. Probab.*, 16(1) :1–57, 1988.

[DZ10] Amir Dembo and Ofer Zeitouni. *Large deviations techniques and applications*, volume 38 of *Stochastic Modelling and Applied Probability*. Springer-Verlag, Berlin, 2010. Corrected reprint of the second (1998) edition.

[Edw65] S. F. Edwards. The statistical mechanics of polymers with excluded volume. *Proc. Phys. Soc.*, 85 :613–624, 1965.

[ET60a] P. Erdős and S. J. Taylor. Some intersection properties of random walk paths. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 11 :231–248, 1960.

[ET60b] P. Erdős and S. J. Taylor. Some problems concerning the structure of random walk paths. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 11 :137–162. (unbound insert), 1960.

[FMW08] Klaus Fleischmann, Peter Mörters, and Vitali Wachtel. Moderate deviations for a random walk in random scenery. *Stochastic Process. Appl.*, 118(10) :1768–1802, 2008.

[FS59] M.E. Fisher and M.F. Sykes. Excluded volume problem and the ising model of ferromagnetism. *Phys. Rev.*, 114 :45–58, 1959.

[GHR84] Donald Geman, Joseph Horowitz, and Jay Rosen. A local time analysis of intersections of Brownian paths in the plane. *Ann. Probab.*, 12(1) :86–107, 1984.

[GKS07] Nina Gantert, Wolfgang König, and Zhan Shi. Annealed deviations of random walk in random scenery. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 43(1) :47–76, 2007.

[Gra08] Loukas Grafakos. *Classical Fourier analysis*, volume 249 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2008.

[HJSS04] Mark Holmes, Antal A. Járai, Akira Sakai, and Gordon Slade. High-dimensional graphical networks of self-avoiding walks. *Canad. J. Math.*, 56(1) :77–114, 2004.

[HS92a] Takashi Hara and Gordon Slade. The lace expansion for self-avoiding walk in five or more dimensions. *Rev. Math. Phys.*, 4(2) :235–327, 1992.

[HS92b] Takashi Hara and Gordon Slade. Self-avoiding walk in five or more dimensions. I. The critical behaviour. *Comm. Math. Phys.*, 147(1) :101–136, 1992.

[KK91] Y. Kantor and M. Kardar. Polymers with random self-interactions. *EPL (Europhysics Letters)*, 14(5) :421, 1991.

[KM02] Wolfgang König and Peter Mörters. Brownian intersection local times : upper tail asymptotics and thick points. *Ann. Probab.*, 30(4) :1605–1656, 2002.

[KMSS94] K. M. Khanin, A. E. Mazel′, S. B. Shlosman, and Ya. G. Sinaĭ. Loop condensation effects in the behavior of random walks. In *The Dynkin Festschrift*, volume 34 of *Progr. Probab.*, pages 167–184. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1994.

[KS79] H. Kesten and F. Spitzer. A limit theorem related to a new class of self-similar processes. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 50(1) :5–25, 1979.

[Kö10] W. König. Upper tails of self-intersection local times of random walks : survey of proof techniques. *ArXiv e-prints*, nov 2010.

[Lau10a] C. Laurent. Large deviations for self-intersection local times in subcritical dimensions. *ArXiv e-prints*, November 2010.

[Lau10b] Clément Laurent. Large deviations for self-intersection local times of stable random walks. *Stochastic Process. Appl.*, 120(11) :2190–2211, 2010.

[Law91] Gregory F. Lawler. *Intersections of random walks*. Probability and its Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1991.

[LD92] Pierre Le Doussal. Diffusion in layered random flows, polymers, electrons in random potentials, and spin depolarization in random fields. *J. Statist. Phys.*, 69(5-6) :917–954, 1992.

[LG85a] J.-F. Le Gall. Sur le temps local d'intersection du mouvement brownien plan et la méthode de renormalisation de Varadhan. In *Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84*, volume 1123 of *Lecture Notes in Math.*, pages 314–331. Springer, Berlin, 1985.

[LG85b] J.-F. Le Gall. Sur le temps local d'intersection du mouvement brownien plan et la méthode de renormalisation de Varadhan. In *Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84*, volume 1123 of *Lecture Notes in Math.*, pages 314–331. Springer, Berlin, 1985.

[LG86a] J.-F. Le Gall. Propriétés d'intersection des marches aléatoires. I. Convergence vers le temps local d'intersection. *Comm. Math. Phys.*, 104(3) :471–507, 1986.

[LG86b] J.-F. Le Gall. Propriétés d'intersection des marches aléatoires. II. Étude des cas critiques. *Comm. Math. Phys.*, 104(3) :509–528, 1986.

[LG86c] Jean-François Le Gall. Sur la saucisse de Wiener et les points multiples du mouvement brownien. *Ann. Probab.*, 14(4) :1219–1244, 1986.

[LG90] Jean-François Le Gall. Wiener sausage and self-intersection local times. *J. Funct. Anal.*, 88(2) :299–341, 1990.

[LGR91] Jean-François Le Gall and Jay Rosen. The range of stable random walks. *Ann. Probab.*, 19(2) :650–705, 1991.

[LSW04] Gregory F. Lawler, Oded Schramm, and Wendelin Werner. On the scaling limit of planar self-avoiding walk. In *Fractal geometry and applications : a jubilee of Benoît Mandelbrot, Part 2*, volume 72 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 339–364. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[LT91] Michel Ledoux and Michel Talagrand. *Probability in Banach spaces*, volume 23 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1991. Isoperimetry and processes.

[MdM80] G Matheron and G de Marsily. Is transport in porous media always diffusive ? a counterxample. *Water Resources*, 16 :901–907, 1980.

[MR97] Michael B. Marcus and Jay Rosen. Laws of the iterated logarithm for intersections of random walks on $\mathbf{Z}^4$. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 33(1) :37–63, 1997.

[MR06] Michael B. Marcus and Jay Rosen. *Markov processes, Gaussian processes, and local times*, volume 100 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[MS93] Neal Madras and Gordon Slade. *The self-avoiding walk*. Probability and its Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1993.

[Per82] Edwin Perkins. Weak invariance principles for local time. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 60(4) :437–451, 1982.

[Ros86] Jay Rosen. A renormalized local time for multiple intersections of planar Brownian motion. In *Séminaire de Probabilités, XX, 1984/85*, volume 1204 of *Lecture Notes in Math.*, pages 515–531. Springer, Berlin, 1986.

[Ros90] Jay Rosen. Random walks and intersection local time. *Ann. Probab.*, 18(3) :959–977, 1990.

[Ros97] Jay Rosen. Laws of the iterated logarithm for triple intersections of three-dimensional random walks. *Electron. J. Probab.*, 2 :no. 2, 1–32 (electronic), 1997.

[RY91] Jay Rosen and Marc Yor. Tanaka formulae and renormalization for triple intersections of Brownian motion in the plane. *Ann. Probab.*, 19(1) :142–159, 1991.

[RY99] Daniel Revuz and Marc Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*, volume 293 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 1999.

[SC97] Laurent Saloff-Coste. Lectures on finite Markov chains. In *Lectures on probability theory and statistics (Saint-Flour, 1996)*, volume 1665 of *Lecture Notes in Math.*, pages 301–413. Springer, Berlin, 1997.

[Spi64] Frank Spitzer. *Principles of random walk*. The University Series in Higher Mathematics. D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto-London, 1964.

[Sto89] Andreas Stoll. Invariance principles for Brownian intersection local time and polymer measures. *Math. Scand.*, 64(1) :133–160, 1989.

[Sym69] K. Symanzik. *Euclidean quantum field theory*. Local quantum theory. R.Jost, New York : Academic Press, 1969.

[Tem56] H.N.V Temperley. Residual entropy of linear polymers. *J. Res. Natl. Bur. Std.*, 56 :55–56, 1956.

[Var69] S.R.S Varadhan. Appendix to euclidian quantum field theory. by symanzik, k. 1969.

[Var85] N. Th. Varopoulos. Hardy-Littlewood theory for semigroups. *J. Funct. Anal.*, 63(2) :240–260, 1985.

[vdH01] Remco van der Hofstad. The lace expansion approach to ballistic behaviour for one-dimensional weakly self-avoiding walks. *Probab. Theory Related Fields*, 119(3) :311–349, 2001.

[vdHdHS98] Remco van der Hofstad, Frank den Hollander, and Gordon Slade. A new inductive approach to the lace expansion for self-avoiding walks. *Probab. Theory Related Fields*, 111(2) :253–286, 1998.

[vdHK01] Remco van der Hofstad and Wolfgang König. A survey of one-dimensional random polymers. *J. Statist. Phys.*, 103(5-6) :915–944, 2001.

[vdHKM06] Remco van der Hofstad, Wolfgang König, and Peter Mörters. The universality classes in the parabolic Anderson model. *Comm. Math. Phys.*, 267(2) :307–353, 2006.

[vdHS03] Remco van der Hofstad and Gordon Slade. The lace expansion on a tree with application to networks of self-avoiding walks. *Adv. in Appl. Math.*, 30(3) :471–528, 2003.

[Wes80] M. J. Westwater. On Edwards' model for long polymer chains. *Comm. Math. Phys.*, 72(2) :131–174, 1980.

[Wol78] Robert L. Wolpert. Wiener path intersections and local time. *J. Funct. Anal.*, 30(3) :329–340, 1978.

[Yor85a] M. Yor. Renormalisation et convergence en loi pour les temps locaux d'intersection du mouvement brownien dans $\mathbf{R}^3$. In *Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84*, volume 1123 of *Lecture Notes in Math.*, pages 350–365. Springer, Berlin, 1985.

[Yor85b] Marc Yor. Compléments aux formules de Tanaka-Rosen. In *Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84*, volume 1123 of *Lecture Notes in Math.*, pages 332–349. Springer, Berlin, 1985.

[Yor86] Marc Yor. Sur la représentation comme intégrales stochastiques des temps d'occupation du mouvement Brownien dans $\mathbf{R}^d$. In *Séminaire de Probabilités, XX, 1984/85*, volume 1204 of *Lecture Notes in Math.*, pages 543–552. Springer, Berlin, 1986.

Résumé

Dans cette thèse on s'intéresse au temps local d'auto-intersections de marches aléatoires. Cette quantité est définie comme la norme-p à la puissance p du temps local de la marche. Elle regarde dans quelle mesure la trajectoire de la marche aléatoire s'intersecte. Le temps local d'auto-intersections est lié à différents modèles physiques comme les modèles de polymères ou les problèmes d'écoulements de flux en milieux stratifiés mais aussi au modèle mathématiques des marches aléatoires en paysages aléatoires.

Nous nous sommes pour notre part intéressés en particulier aux grandes déviations du temps local d'auto-intersections, c'est à dire que nous regardons la probabilité que la quantité d'intersections de la marche aléatoire soit plus grande que sa moyenne. Cette question qui a été très étudiée au cours des années 2000 fait apparaitre trois cas distincts, le cas sous-critique, le cas critique et le cas sur-critique. Nous améliorons la connaissance sur cette question au travers de deux résultats complets et d'un résultat partiel. D'abord nous prouvons un principe de grandes déviations dans les cas critique et sur-critique des marches α-stables, puis nous améliorons les échelles de déviations au cas sous-critique tout entier de la marche simple, enfin nous sommes en train d'étendre ce dernier résultat aux marches α-stables. Par ailleurs les trois preuves sont basées sur l'utilisation d'une version due à Eisenbaum d'un théorème d'isomorphisme de Dynkin. Cette méthode d'abord introduite par Castell dans le cas critique est donc ici étendue aux autres cas. Nous avons donc réussi à unifier les différentes méthodes de preuves au travers ce théorème d'isomorphisme.

Abstract

In this thesis we are interested in the self-intersection local times of random walks. This quantity is defined as the p-norm to the power of p of the local times of the random walk. It measures how much the trajectory of the random walk intersects itself. The self-intersection local times is connected with various physical models as polymer models or problems of anomalous dispersion in layered random flows, but it is also linked with the mathematical model of random walks in random sceneries.

More precisely, we are interested in the large deviations of the self-intersection local times, i.e. we work on the probability for the intersections to be larger than expected. This question that has been studied a lot during the 2000's is divided in three cases, the subcritical one, the critical one and the super critical one. We improve the knowledge about this question by two complete results and a partial one. First, we have proved a large deviation principle in the critical and super critical cases of α-stable random walks, then we have improved the deviations' scales to the entire subcritical case of simple random walk, finally we are extending this last result to the α-stable random walks. The three proofs are based on a version due to Eisenbaum of a Dynkin isomorphism theorem. This method which has been first introduced by Castell in the critical case, is extended here to the others cases. Thus, we have succeeded to unify the methods of proof by this isomorphism theorem.